

ANDRÉ LUIZ SILVA DE CAMPOS

**EVENTOS EXTREMOS NO MERCADO DE
DERIVATIVOS ACIONÁRIOS BRASILEIRO**

**Trabalho de Formatura apresentado
à Escola Politécnica da Universidade
de São Paulo para obtenção do
Diploma de Engenheiro de Produção-
Área Mecânica**

**SÃO PAULO
2003**

ANDRÉ LUIZ SILVA DE CAMPOS

**EVENTOS EXTREMOS NO MERCADO DE
DERIVATIVOS ACIONÁRIOS BRASILEIRO**

**Trabalho de Formatura apresentado
à Escola Politécnica da Universidade
de São Paulo para obtenção do
Diploma de Engenheiro de Produção-
Área Mecânica**

**Orientador:
Professora Doutora
Linda Lee Ho**

SÃO PAULO

2003

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais José Maria de Campos e Anita Pelegrini Silva de Campos, pelo apoio infindável.

À professora Linda Lee Ho, pelo incentivo e contribuição na realização do trabalho.

À minha companheira Daniele Saullo Andrade, pelo carinho e paciência.

Aos meus amigos, Danilo Bonfatti, Christian Iveson, Guilherme Assis, João Senna, Thiago Cozzi e Tiago Pessoa pela amizade e companherismo.

E a todos que direta ou indiretamente contribuíram para a execução do trabalho.

RESUMO

Os eventos extremos de mercado são de grande importância para gerentes de risco, operadores do mercado financeiro, administradores de carteiras de investimentos, reguladores e gerenciadores de reservas de margens em bolsas de derivativos. Embora muitos artigos na literatura de finanças tenham tentado explicar eventos extremos de mercado, é muito difícil encontrar explicações racionais para estas circunstâncias não usuais. Este trabalho utiliza a Teoria dos Valores Extremos para analisar o comportamento de eventos extremos no mercado de derivativos acionários brasileiro, visando a construção de ferramentas estatísticas que auxiliem no gerenciamento de risco.

ABSTRACT

Extreme market events are of great importance for risk managers, traders, portfolio managers, regulators and margin committees in derivatives exchanges. Although many articles in the finance literature have attempted to explain extreme market events, it is very difficult to find a rational explanation to these unusual circumstances. This work uses the Extreme Value Theory to analyze the behavior of extreme events in brazilian stock derivatives market.

SUMÁRIO

<u>CAPÍTULO 1 – APRESENTAÇÃO DO TRABALHO</u>	11
<i><u>1.1 A Empresa</u></i>	21
<i><u>1.2 Motivação</u></i>	23
<i><u>1.3 Objetivo do Trabalho</u></i>	24
<u>CAPÍTULO 2 – CONCEITOS IMPORTANTES</u>	28
<i><u>2.1 Introdução</u></i>	28
<i><u>2.2 O Mercado de Derivativos</u></i>	28
<i><u>2.2.1 Principais Características</u></i>	28
<i><u>2.2.2 Ativo e Passivo de um Contrato de Derivativos</u></i>	30
<i><u>2.2.3 Alavancagem</u></i>	30
<i><u>2.2.4 Organização dos Mercados</u></i>	33
<i><u>2.2.5 Os Profissionais do Mercado de Derivativos</u></i>	34
<i><u>2.2.6 Operações com derivativos</u></i>	34
<i><u>2.2.7 Tipos de Derivativos</u></i>	35
<i><u>2.2.8 Alguns mercados futuros específicos</u></i>	37
<i><u>2.2.9 Futuro de IBOVESPA</u></i>	38
<i><u>2.3 Risco – A Utilização do VaR</u></i>	42
<i><u>2.4 Teoria dos Valores Extremos</u></i>	46
<i><u>2.4.1 Introdução</u></i>	46
<i><u>2.4.2 Desenvolvimento Teórico</u></i>	46
<i><u>2.4.3 Gumbel, Fréchet e Weibull: As Três Distribuições de Valores Extremos</u></i>	50
<i><u>2.4.4 A Distribuição GEV Padrão(Generalized Extreme Value)</u></i>	57
<i><u>2.4.5 A Distribuição GEV Não-Padronizada</u></i>	57
<i><u>2.5 Estimação de Parâmetros</u></i>	58
<i><u>2.6 Aplicação da Estimação de Parâmetros</u></i>	64
<u>CAPÍTULO 3 –AVALIAÇÃO DOS PARÂMETROS</u>	28
<i><u>3.1 Introdução</u></i>	70
<i><u>3.2 A Amostra Escolhida</u></i>	70
<i><u>3.2.1 Amostra Inicial</u></i>	70
<i><u>3.2.2 Amostra de Mínimos e Máximos</u></i>	71
<i><u>3.3 Análise Exploratória dos Dados</u></i>	72
<i><u>3.3.1 Estatísticas Descritivas</u></i>	72
<i><u>3.3.2 Função Média e Função Mediana dos Excessos</u></i>	78
<i><u>3.3.3 O Teste de Jarque-Bera</u></i>	80

<u>3.4 Análise das Estimativas Encontradas</u>	82
<u>3.4.1 Apresentação das Estimativas</u>	82
<u>3.4.2 Os Testes de Kolmogorov-Smirnov e Kuiper</u>	83
<u>3.4.3 O Teste de Razão de Verossimilhança</u>	85
<u>3.4.4 QQ-plot</u>	87
<u>3.4.5 Densidade de Probabilidade Esperada x Densidade de Probabilidade Observada e Análises Conclusivas</u>	90
<u>CAPÍTULO 4 – APLICAÇÕES DO MODELO DA GEV NO GERENCIAMENTO DE RISCO</u>	92
<u>4.1 Introdução</u>	92
<u>4.2 Cálculo do Período do Retorno u</u>	93
<u>4.3 Cálculo da Probabilidade de Ocorrência de Eventos Extremos</u>	95
<u>4.4 Cálculo do Evento de t-meses</u>	99
<u>4.5 Observações Gerais</u>	101
<u>CAPÍTULO 5 – CONCLUSÃO</u>	28
<u>5.1 Introdução</u>	102
<u>5.2 Estimado x Observado</u>	102
<u>5.2.1 Cálculo da Probabilidade de Ocorrência de Eventos Extremos</u>	102
<u>5.2.3 Evento de t-meses</u>	105
<u>5.3 Conclusão</u>	109
<u>5.4 Comentários Finais e Recomendações</u>	112
<u>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</u>	114

APÊNDICES:

APÊNDICE A – SÉRIES HISTÓRICAS

LISTA DE FIGURAS

<u>Figura 2.1-Distribuições de Probabilidade: Fréchet, Gumbel e Weibull.....</u>	52
<u>Figura 2.2-Funções Densidades de Probabilidades Weibull Padrão para k=-0,25, k=-0,5, k=-1,0, k=-1,5, k=-2,0, k=-3,0, k=-4,0 e k=-5,0</u>	54
<u>Figura 2.3-Funções Densidades de Probabilidades Fréchet Padrão para k=0,25, k=0,5, k=1,0, k=1,5, k=2,0, k=3,0, k=4,0 e k=5,0</u>	55
<u>Figura 2.4– Maximização de log L em relação a ?.....</u>	61
<u>Figura 3.1-Histograma da série de log-retornos do índice BOVESPA.....</u>	73
<u>Figura 3.2 –Log-retornos diários (%) do índice BOVESPA.....</u>	74
<u>Figura 3.3 -Mínimos mensais (%) do índice BOVESPA.....</u>	75
<u>Figura 3.4 -Máximos mensais (%) do índice BOVESPA</u>	75
<u>Figura 3.5-Histograma da série de máximos mensais do índice BOVESPA.....</u>	77
<u>Figura 3.6-Histograma da série de máximos mensais do índice BOVESPA.....</u>	77
<u>Figura 3.7 – Função da média dos excessos empírica para a cauda esquerda da distribuição dos log-retornos diários do índice BOVESPA.....</u>	79
<u>Figura 3.8 – Função da média dos excessos empírica para a cauda direita da distribuição dos log-retornos diários do índice BOVESPA.....</u>	80
<u>Figura 3.9 -QQ-plot para os mínimos mensais usando a distribuição gumbel padrão como referência</u>	87
<u>Figura 3.10 -QQ-plot para os máximos mensais usando a distribuição gumbel padrão como referência</u>	88
<u>Figura 3.11 -QQ-plot para os mínimos mensais usando a distribuição fréchet padrão como referência</u>	89
<u>Figura 3.12 -QQ-plot para os máximos mensais usando a distribuição fréchet padrão como referência</u>	89
<u>Figura 3.13 –Histograma e função densidade de probabilidade para os mínimos mensais do índice BOVESPA.....</u>	91
<u>Figura 3.14 –Histograma e função densidade de probabilidade para os máximos mensais do índice BOVESPA.....</u>	91
<u>Figura 4.1 – Tempo estimado para que ocorra um retorno diário acima de um valor de corte para os máximos/mínimos absolutos valores mensais do índice BOVESPA.....</u>	94
<u>Figura 4.2 – Probabilidade de que ocorra pelo menos um retorno diário acima de um valor de corte para os máximos/mínimos absolutos mensais do índice BOVESPA.....</u>	96
<u>Figura 4.3 – Probabilidade de que ocorra pelo menos um retorno diário dos máximos/mínimos mensais do índice BOVESPA acima/abaixo de um valor de corte correspondente dentro dos próximos n meses.....</u>	99
<u>Figura 4.4 – Evento t-meses para os máximos/mínimos absolutos mensais do índice BOVESPA.....</u>	101
<u>Figura 5.1 – Probabilidade estimada x observada de que ocorra pelo menos um retorno diário acima de um valor de corte para os máximos mensais do índice BOVESPA.....</u>	104

<u>Figura 5.2 – Probabilidade estimada x observada de que ocorra pelo menos um retorno diário acima de um valor de corte para os mínimos absolutos mensais do índice BOVESPA.....</u>	104
<u>Figura 5.3 – Evento t-meses estimado x observado para os máximos/mínimos absolutos mensais do índice BOVESPA.....</u>	106
<u>Figura 5.4 – Quantidade de ultrapassagens dos valores dos eventos de t-meses estimadas x observadas para os máximos mensais do índice BOVESPA.....</u>	108

LISTA DE TABELAS

<u>Tabela 1.1- Empresas participantes do índice Dow Jones Industrials</u>	22
<u>Tabela 1.2- Empresas participantes do Índice BOVESPA</u>	39
<u>Tabela 1.3 – Correlações entre os ativos</u>	44
<u>Tabela 3.1- Estatísticas descritivas dos log-retornos diários do índice Bovespa (%)</u> 72	
<u>Tabela 3.2 – Estatísticas descritivas dos mínimos e máximos mensais dos retornos diários do índice BOVESPA (%)</u>	76
<u>Tabela 3.3 – Estatísticas de Jarque-Bera e p-valor para as séries completa, mínimos mensais e máximos mensais.</u>	81
<u>Tabela 3.4 - Estimativas dos Parâmetros da Distribuição GEV para os mínimos e máximos mensais do índice BOVESPA</u>	82
<u>Tabela 3.5 – Valores Críticos das Estatísticas de Teste de Kolmogorov-Smirnov e Kuiper Correspondentes aos Níveis de Significância de 1% e 5%</u>	84
<u>Tabela 3.6 – Estatísticas de Bondade de Ajuste para os mínimos e máximos mensais do índice BOVESPA</u>	85
<u>Tabela 3.7 – Teste da Razão de Verossimilhança para o índice BOVESPA</u>	86
<u>Tabela 4.1 – Tempo estimado para que ocorra um retorno diário acima de um valor de corte para os máximos/mínimos absolutos mensais do índice BOVESPA</u> ... 94	
<u>Tabela 4.2 – Probabilidade de que ocorra pelo menos um retorno diário acima de um valor de corte para os máximos/mínimos absolutos mensais do índice BOVESPA</u>	96
<u>Tabela 4.3 – Probabilidade de que ocorra pelo menos um retorno diário dos máximos/mínimos absolutos mensais do índice BOVESPA acima de um valor de corte correspondente dentro dos próximos n meses.</u>	98
<u>Tabela 4.4 – Evento t-meses para os máximos mensais do índice BOVESPA</u>	100
<u>Tabela 5.1 – Probabilidade estimada x observada de que ocorra pelo menos um retorno diário acima de um valor de corte para os máximos/mínimos absolutos mensais do índice BOVESPA</u>	103
<u>Tabela 5.2 – Evento t-meses estimado x observado para os máximos mensais do índice BOVESPA</u>	106
<u>Tabela 5.3 – Quantidade de ultrapassagens dos valores dos eventos de t-meses estimadas x observadas para os máximos e mínimos mensais do índice BOVESPA</u>	107

CAPÍTULO 1 – APRESENTAÇÃO DO TRABALHO

1.1 A Empresa

A empresa na qual foi feito o trabalho é o Banco J. P. Morgan, braço brasileiro do JPMorganChase Bank, o segundo maior banco dos Estados Unidos, instituição cujas ações fazem parte do índice DJIA (Dow Jones Industrial Average), o mais importante e negociado índice de ações (são 30 empresas presentes no índice, e apenas outro banco, o Citigroup, faz parte do Dow Jones). A receita operacional líquida do JPMorganChase no ano de 2002 foi US\$ 3,4 bilhões.

O JPMorganChase Bank foi formado em 1 de Janeiro de 2001, como resultado da fusão entre o The Chase Manhattan Bank e o The J. P. Morgan Bank. O banco Chase Manhattan adquiriu controle sobre o J. P. Morgan, um banco fundado em Londres em 1850 por Charles Peabody, que originou a conhecida House of Morgan e originou ainda o banco Morgan Stanley Dean Witter e o Banco Morgan Grenfell de Londres (adquirido posteriormente pelo Deutsche Bank). O J. P. Morgan teve papel muito importante na história dos Estados Unidos pois financiou a construção das estradas de ferro que cortariam o país e ainda teve na figura do banqueiro John Pierpont Morgan uma das pessoas consideradas mais influentes na primeira metade do século 20. John Pierpont Morgan ainda é considerado o maior banqueiro internacional de todos os tempos, e ainda foi o criador do embrião do FED, o banco central estadunidense. Atribui-se a ele o mérito de ter evitado duas grandes crises da economia dos Estados Unidos, e ter ajudado a diminuir os efeitos da crise de 1929. Já conhecido como Morgan Guaranty, o J. P. Morgan reestruturou as dívidas de vários países no chamado Plano Brady, que incluiu a reestruturação da dívida externa brasileira.

How the 30 Dow Jones Industrials Did

Ranked by percentage change in the second quarter

COMPANY NAME	CLOSE 3/28/02	CLOSE 6/28/02	2Q %CHG.	COMPANY NAME	CLOSE 3/28/02	CLOSE 6/28/02	2Q %CHG.	COMPANY NAME	CLOSE 3/28/02	CLOSE 6/28/02	2Q %CHG.
Coca-Cola	52.26	56.00	7.2%	Honeywell Int'l	38.27	35.23	-7.9%	Philip Morris	52.67	43.68	-17.1%
3M	115.01	123.00	6.9	United Technologies	74.20	67.90	-8.5	Walt Disney	23.08	18.90	-18.1
McDonald's	27.75	28.45	2.5	Microsoft	60.31	54.70	-9.3	SBC Communications	37.44	30.50	-18.5
International Paper	43.01	43.58	1.3	Wal-Mart Stores	61.29	55.01	-10.2	Johnson & Johnson	64.95	52.26	-19.5
Procter & Gamble	89.30	90.09	-0.9	American Express	40.96	36.32	-11.3	Citigroup	49.52	38.75	-21.7
J.P. Morgan Chase	35.65	33.92	-4.9	General Motors	60.45	53.45	-11.6	General Electric	37.45	29.05	-22.4
DuPont	47.15	44.40	-5.8	Merck	57.58	50.64	-12.1	Home Depot	48.61	36.73	-24.4
Eastman Kodak	31.17	29.17	-6.4	Alcoa	37.74	33.15	-12.2	IBM	104.00	72.00	-30.8
Exxon Mobil	43.83	40.92	-6.6	Caterpillar	56.85	48.95	-13.9	AT&T	15.70	10.70	-31.8
Boeing	48.25	45.00	-6.7	Hewlett-Packard	17.94	15.28	-14.8	Intel	30.41	18.27	-39.9

Source: WSJ Market Data Group

Tabela 1.1- Empresas participantes do índice Dow Jones Industrials

Fonte: “site” Dow Jones

O Chase Manhattan é também um banco muito antigo, e foi administrado por integrantes da família Rockefeller. Foi fundado ainda no século XVIII como braço financeiro da companhia de fornecimento de água da cidade de Nova York. Outros bancos tão ou mais antigos foram adquiridos, em várias fusões, destacando-se a fusão com o The Chemical Bank (ocorrida em 1996), banco fundado em 1823 a partir de uma indústria química (que por sua vez adquiriu o The Manufacturers Hanover Corporation Bank em 1992, sendo este um banco fundado em 1812 a partir da New York Manufacturing Company).

No Brasil, o Banco J. P. Morgan resultou da fusão entre os braços brasileiros das instituições americanas, o Banco Chase Manhattan e o Banco J. P. Morgan (antigo). O antigo banco J. P. Morgan ingressou no mercado brasileiro através da aquisição da carta patente da Distrivolks e adquirindo a Banca Commerciale Italiana. E o Banco Lar Brasileiro (antiga denominação do Chase no Brasil) fundiu-se ao NorChem (resultante da fusão do Chemical Bank no Brasil com o Banco Noroeste) para formar o Banco Chase Manhattan. Em janeiro de 1999 o Chase Manhattan adquiriu o Banco Patrimônio de Investimentos e a corretora Robert Fleming, conhecida anteriormente como Flemings.

O Banco J. P. Morgan é um dos 25 bancos “dealers” (bancos mais ativos no mercado financeiro e que participam diretamente dos leilões promovidos pelo BC) do Banco Central e é um dos mais ativos bancos em movimentação financeira na BM&F (Bolsa de Mercadorias e Futuros).

1.2 Motivação

Segunda-feira, 19 de outubro de 1987, o índice Dow Jones Industrial Average caiu 22 % , fazendo desaparecer meio trilhão de dólares norte-americanos em valores de ações. Este evento ficou conhecido como Segunda-Feira Negra, ou “Black Monday”. No dia seguinte, os principais mercados acionários asiáticos e europeus submergiram. Uma década e meia depois, com diversos trabalhos publicados sobre o assunto, gerentes de risco, operadores de mercado, administradores de carteiras de investimento e reguladores ainda se perguntavam o que realmente tinha causado aqueles eventos não usuais em 1987.

Quarta-feira, 16 de setembro de 1992, especuladores forçaram a libra inglesa a ser negociada além de sua banda cambial delimitada pelo Banco Central Inglês. Este evento ficou conhecido como Quarta-Feira Negra, ou “Black Wednesday”. Estes dois acontecimentos podem ser considerados eventos raros, ou seja, eventos não usualmente observados pelo mercado.

Os mercados emergentes também tiveram seus eventos extremos. Alguns exemplos podem ser citados, como: a desvalorização da moeda mexicana (final do ano de 1994), a crise relacionada com o Brady Bond (início de 1995), a série de desvalorizações asiáticas (durante todo o ano de 1997), a crise russa (final de 1998), a desvalorização da moeda brasileira (início de 1999), a crise argentina (ano de 2001) e mais recentemente a crise de confiança que assolou o Brasil durante o ano passado (a partir de julho de 2002). Todos estes acontecimentos são eventos raros. Durante estes acontecimentos observou-se a alta volatilidade que os mercados (ações, renda fixa, de câmbio e de futuros) experimentam. Nestes períodos de extrema volatilidade muitos ativos de renda fixa começam a ser encarados pelos operadores do mercado financeiro como ativos de renda variável.

Eventos extremos de mercado são de grande importância para a economia como um todo. Por exemplo, Moore(1983) mostra que as principais recessões econômicas são seguidas por declínios substanciais nos preços de ações.

Tais eventos também são de extrema importância para o gerenciamento de risco das posições das instituições participantes do mercado financeiro. Dado que todas as metodologias utilizadas para estimar o *VaR* (“Value-at-Risk”) de uma

carteira de investimentos (Jorion(1997)) assumem que o comportamento do mercado é estável, eventos extremos demandam uma abordagem especial dos gerentes de riscos. Ou seja, metodologias para estimar o *VaR* de uma carteira de investimentos não foram planejadas para cobrir eventos extremos de mercado. Os impactos de um evento raro em uma carteira de investimentos podem ser analisados através de um teste de estresse. Resumidamente, o teste de estresse é a simulação de um evento raro para se estudar o comportamento de uma carteira de investimentos qualquer. Entretanto, o teste de estresse não foi planejado para cobrir o comportamento médio dos mercados financeiros. Logo, percebe-se que o *VaR* de uma carteira de investimentos não elimina as deficiências de um teste de estresse, nem os procedimentos do último suprem as fraquezas do primeiro (Duarte(1997)). O melhor a se fazer é um trabalho conjunto com as duas ferramentas sendo utilizadas como complementares uma a outra.

A previsão de eventos raros é geralmente difícil. Os fundamentos de mercado de Bierman(1991,1995) não indicaram que os preços das ações seriam absurdamente baixos como em 1929 e 1987. A identificação de ataques especulativos e desvalorização excessiva de ativos financeiros também não é possível utilizando teorias econômicas e de finanças (Flood and Garber(1994)), embora estes eventos possam parecer bastante óbvios depois que tenham ocorrido. Resumindo, independentemente da possibilidade dos fundamentos de mercado serem capazes de justificar os preços correntes, os dados históricos são a prova de que sempre existem cenários razoáveis para que um evento raro de mercado aconteça.

1.3 Objetivo do Trabalho

O objetivo do trabalho é utilizar a Teoria dos Valores Extremos (TVE) para analisar eventos extremos no mercado de derivativos acionários brasileiro. É interessante frisar que a TVE não prevê o futuro certamente, mas fornece modelos estatísticos que permitem tratar a incerteza que cerca tais eventos não usuais, auxiliando assim o processo decisório dada a sua função de ferramenta medidora de risco.

A análise de risco do mercado de derivativos acionários brasileiro será realizada através da série de futuro do índice BOVESPA. O futuro de IBOVESPA, ou futuro do índice BOVESPA, índice brasileiro de ações mais importante, mede o valor de mercado de uma carteira de ações hipotética na Bolsa de Valores de São Paulo. O peso relativo de cada ação na carteira é baseado no montante negociado nos últimos meses na Bolsa de Valores de São Paulo. O futuro do índice BOVESPA é rebalanceado trimestralmente. Mais detalhes do índice serão apresentados no capítulo 2.

A análise de risco será baseada na construção de três indicadores de risco, explicitados a seguir:

Período do Retorno u

O período de retorno u pode ser definido como sendo o tempo médio de espera para que ocorra um retorno diário maior ou menor que um dado valor de corte u .

Probabilidade de Ocorrência de Eventos Extremos

Este indicador é dado pela probabilidade de ocorrer um retorno diário acima ou abaixo de um dado valor de corte para um espaço temporal fixo especificado.

Evento de t -meses

O evento de t -meses é um evento extremo que se espera observar pelo menos uma vez em t meses.

Para se construir tais indicadores é necessário primordialmente se conhecer a distribuição de probabilidade dos valores extremos das séries de retornos de futuro do índice BOVESPA. Tendo a distribuição dos valores definida, através de algumas suposições e de manipulações estatísticas e matemáticas obtém-se os indicadores propostos.

1.4 Organização do Trabalho

O trabalho será organizado em 5 capítulos como exemplificado a seguir.

No capítulo 2, apresenta-se minuciosamente o mercado de derivativos (futuros, swaps e opções) citando os principais produtos e como são comercializados. Ainda neste capítulo apresenta-se uma discussão sobre o método de análise de risco “*Value-at-Risk*”. Em seguida, a Teoria dos Valores Extremos é introduzida, a qual fornece resultados necessários para a determinação da distribuição assintótica dos valores extremos dos retornos do futuro do índice BOVESPA. Por último, descreve-se o método de estimação de parâmetros que será utilizado para estimar parâmetros da distribuição que os dados em estudo apresentam.

No capítulo 3 analisam-se exploratoriamente os dados e em seguida aplica-se a teoria dos valores extremos. O objetivo do capítulo é entender a distribuição dos valores extremos dos retornos do futuro índice BOVESPA no mercado brasileiro. O trabalho foca na utilização do método da máxima verossimilhança para estimação dos parâmetros da distribuição de valores extremos, descrito no capítulo 2. Depois da estimativa dos parâmetros realizam-se testes estatísticos para testar a aderência da amostra real ao modelo estimado. O fluxo de tarefas a desenvolver nesta etapa do trabalho é enumerado respectivamente abaixo:

1. Aquisição da série histórica do futuro do índice BOVESPA.
2. Análise exploratória preliminar dos dados.
3. Construção das séries de retornos do futuro do índice BOVESPA.
4. Estimativa dos parâmetros das distribuições de valores extremos.
5. Teste de aderência-melhor distribuição de valores extremos.

O capítulo 4 é o capítulo da construção e análise dos indicadores de risco citados. Esta análise pode ser bastante útil aos administradores de carteiras de

investimentos, reguladores do mercado financeiro e etc, na medida que elas os auxiliam a entender melhor o comportamento e os riscos associados ao futuro do índice BOVESPA, e que pode ser ampliado para outros mercados.

O capítulo 5 é o capítulo de fechamento. Neste capítulo será feito um teste dos indicadores construídos no capítulo 4. O teste será baseado na comparação dos números estimados no capítulo 4 com os números observados. Após o teste serão desenvolvidas as conclusões do trabalho, sugestões de melhoria e propostas de continuação do trabalho.

CAPÍTULO 2 – CONCEITOS IMPORTANTES

2.1 Introdução

Este é um capítulo de grande importância para o desenvolvimento do trabalho. Inicialmente será realizada uma apresentação do mercado financeiro de derivativos, seus participantes e seus principais produtos. Logo em seguida será apresentada a Teoria dos Valores Extremos, a qual será aplicada posteriormente para o desenvolvimento do trabalho. Por último será exposto um método de estimação de parâmetros, no caso o método de máxima verossimilhança, que será utilizado para estimar os parâmetros das distribuições de probabilidade dos dados em estudo.

2.2 O Mercado de Derivativos

Derivativos são contratos que estipulam trocas financeiras entre as partes, baseadas em determinados preços.

2.2.1 Principais Características

Um contrato derivativo prevê ações que uma parte deve tomar (pagamentos, recebimentos, compras ou vendas) frente à outra parte, em relação a um ou mais ativos ou índices, que são chamados objetos ou ativos subjacentes ao contrato. O contrato não precisa obrigar a uma ação sobre o objeto (compra ou venda), mas pode obrigar a uma troca de valores baseada no preço do objeto. O derivativo especifica as condições dessas ações, dentre as quais as datas em que deverão ser executadas.

Os termos de um derivativo são negociados, e deles depende o resultado final (lucro ou prejuízo) de cada parte. Os tipos mais comuns têm um único parâmetro de negociação, que é o preço ou cotação do derivativo.

Os contratos derivativos têm uma data de vencimento, na qual as obrigações das partes se encerram. Essa data de vencimento costuma ser também a data em que as partes quitam suas obrigações (liquidação do contrato), e também a data final para a coleta dos preços dos objetos que definirão o valor dessas obrigações.

Nos mercados derivativos, derivativos são transacionados. Na maioria dos mercados derivativos, existe não só a possibilidade de ingressar em transações com derivativos, mas de sair de transações em que se ingressou anteriormente (os conceitos equivalentes a adquirir e desfazer-se). Ou seja, um contrato derivativo não precisa ser necessariamente levado a vencimento, podendo, dependendo do mercado em que é transacionado, ser encerrado antes do vencimento, com a devida compensação financeira das partes.

Futuros, swaps e opções são os três tipos básicos de derivativos, que serão oportunamente explicados. Cada tipo de derivativo possui um funcionamento diferente.

Os contratos derivativos que uma parte possui em aberto (a serem liquidados) constituem a sua posição (ou as suas posições). O conceito de posição está para os derivativos assim como o conceito de estoque está para os bens e ativos.

Os derivativos são geralmente cotados sobre uma unidade de ativo-objeto (por exemplo: o futuro de dólar é negociado em reais por cada 1 dólar, o ouro futuro é cotado em reais por grama, etc.). Porém, quando se trata de contratos padronizados para negociação em bolsa, geralmente se institui uma unidade de negociação mais conveniente, chamada lote-padrão, lote ou simplesmente “contrato”. Assim, um lote de dólar futuro é um contrato sobre 50.000 dólares; um lote de ouro futuro é um contrato sobre 250 gramas de ouro. Posições em derivativos padronizados costumam ser medidas em lotes. Posições em derivativos não padronizados são medidas em unidades de ativo-objeto. Índices de ações e outros índices que não façam referência direta a uma certa quantidade de ativos são geralmente cotados em pontos, e cada lote de contrato derivativo sobre eles refere-se a um valor do ponto, que é o multiplicador que transforma pontos em dinheiro. Assim, o valor do ponto desempenha o mesmo papel que o multiplicador do lote-padrão.

A quantidade de ativo objeto referenciada em um derivativo pode ser expressa em valor financeiro, o que dá uma idéia do tamanho da aposta envolvida. Este é o valor nocional (ou nominal) de uma transação com derivativos. O valor econômico efetivamente envolvido é geralmente pequeno se comparado com o valor nocional. O valor nocional pode ser lido como o principal de uma operação, ao passo que o valor econômico corresponderia às variações desse principal. Assim, estima-se

que as transações com derivativos envolveram USD 40 trilhões em valores nominais em 1996, mas que a quantidade de dinheiro que realmente foi movimentada por esses contratos tenha sido pouco maior que USD 1 trilhão.

O valor nocional não é uma quantidade real de dinheiro. A não ser em casos de liquidação física, não é recebível nem exigível. O objetivo dos derivativos não é movimentar o valor nocional, mas sim movimentar o valor econômico, entre as partes.

2.2.2 Ativo e Passivo de um Contrato de Derivativos

Um contrato de derivativos geralmente associa, a cada parte, um direito e uma obrigação. Assim, contratos derivativos possuem ativo e passivo embutidos simultaneamente. O valor econômico de um contrato nada mais é do que o excesso do ativo sobre o passivo no contrato. Alguns tipos de contratos (ex: swaps) mencionam explicitamente o ativo e o passivo envolvidos. Outros tipos citam apenas a regra de liquidação, da qual podemos inferir o ativo e o passivo implícitos. Por exemplo: se um derivativo prevê que a parte X deve pagar o resultado de $A - B$ à parte Y , é porque o ativo da parte X é B , e o passivo da parte X é A . O tamanho do ativo e do passivo envolvidos é proporcional ao valor nocional do contrato.

Não compreender que um derivativo possui simultaneamente ativo e passivo é a principal causa de perdas extremas em transações de derivativos. Como muitos derivativos são negociados por valor econômico inicial nulo, profissionais com pouca experiência acerca do comportamento do ativo subjacente não vêem impedimentos para ingressar em posições grandes demais (de valor nocional exagerado). Essas posições podem ser extremamente prejudiciais, caso o lado passivo aflore, levando a um valor econômico negativo.

2.2.3 Alavancagem

Os resultados (lucros e perdas) que as partes auferem de uma transação com derivativos são proporcionais aos valores nocionais envolvidos (ou seja, ao tamanho da aposta). Porém, a quantidade de dinheiro que é inicialmente cobrada para o

ingresso em uma posição de derivativos é geralmente bem pequena, comparada ao valor nocial. No caso de alguns derivativos, como futuros e swaps, a quantia cobrada pelo ingresso em uma posição, não fosse a exigência de depósitos de garantia, seria zero. Isto quer dizer que um agente pode assumir uma posição bastante grande em relação ao seu caixa. Por isso, os contratos derivativos são instrumentos alavancados: com uma parcela X de caixa o agente controla uma posição muitas vezes maior do que X .

Estar comprado em um mercado subjacente significa que se tem uma relação na qual um aumento de preço do mercado subjacente melhora sua situação econômica - aumenta a quantia a ser recebida e/ou diminui a quantia a ser paga, ou, de outra forma, aumenta o ativo e/ou reduz o passivo. Estar vendido em um mercado subjacente significa que um aumento de preço deste piora a situação econômica.

Para os mercados de títulos de renda fixa ou taxas de juros, os termos comprado e vendido são substituídos pelos termos ativo (aplicado, dado) ou passivo (captado, tomado). Os termos dado e tomado significam, respectivamente, que se ingressou em uma relação equivalente a fazer um investimento a um determinado índice (tem-se um ativo corrigido pelo índice), ou que se contraiu uma dívida corrigida por este índice (tem-se um passivo corrigido pelo índice).

Nos mercados derivativos, usam-se os termos comprado e vendido para designar o lado em que se está no contrato. Se o derivativo for um swap, usa-se alternativamente dado e tomado. Nota-se porém que nem sempre estar comprado em um derivativo implica estar comprado no ativo subjacente, pois há derivativos dos quais o valor é inversamente correlacionado com a cotação do ativo subjacente.

Na vida cotidiana, encontramos muitos exemplos do que é estar comprado em alguma coisa: compramos carros, ações, apartamentos, CDBs e cotas de fundos. Mas raramente temos exemplos do que é estar vendido. Na vida cotidiana, as pessoas não ficam vendidas; elas vendem o que têm, e acabou. Essa venda não se estende no tempo. O outro tipo de venda, que origina uma posição vendida, chama-se venda “short”, e é quando se vende o que não se tem. Quando se vende o que não se tem, fica claro que essa operação possui um resultado, que é a diferença entre o valor da venda e o custo de reposição do que foi vendido, e que, enquanto não for liquidada, essa venda constitui uma exigibilidade.

Nos mercados à vista, a venda “short” é possível através do empréstimo (aluguel) do bem. Ações, ouro e vários outros ativos possuem mercados organizados de aluguel. Nos mercados derivativos, a venda “short” dá-se simplesmente por entrar no contrato como vendedor, ou seja, do lado que piorará sua situação econômica caso o valor do contrato suba. Como será visto mais adiante, existe uma relação entre estar vendido em um derivativo e as formas de aluguel e venda “short” no mercado subjacente a ele.

Preço justo de um derivativo

A expressão “preço justo de um derivativo” (ou “preço teórico”) é muito utilizada. Basta lembrar que uma das definições de derivativo é um contrato ou título do qual o preço depende do preço de outro ativo. Teoricamente existe uma maneira de determinar a relação correta entre o preço de um derivativo e o do seu objeto, uma vez que ambos estão amarrados pelas propriedades do contrato. Por essa teoria, todo derivativo tem um preço justo em função do preço do seu objeto (e de outros fatores de mercado).

Nota-se que, ao contrário das tentativas de determinação do preço justo de ações, taxas de câmbio e commodities, nas quais o preço justo é contraposto ao preço de mercado na tentativa de descobrir erros de avaliação por parte do mercado, o preço justo de um derivativo é uma função do preço de mercado do seu ativo-objeto. Dessa forma, o preço justo de um derivativo altera-se conforme o mercado do seu ativo-objeto e de outros fatores de mercado flutuarem.

Ativo subjacente e fatores subjacentes

Na maioria dos casos, existe apenas um ativo principal a que o derivativo se refere, o que não quer dizer que o valor (e o preço) do derivativo dependa exclusivamente desse ativo principal. Esse ativo principal é por definição o objeto do derivativo. No entanto há outros fatores subjacentes que influem no valor do derivativo. Quase todo derivativo é sensível às taxas de juros no período que vai desde a data atual até o vencimento. Alguns derivativos são sensíveis a mudanças na

taxa de câmbio, outros à volatilidade (grau de risco de um mercado) e outros à correlação entre dois mercados.

2.2.4 Organização dos Mercados

O grau de organização de um mercado refere-se à facilidade de negociação e à transparência de preços.

Do menos organizado para o mais organizado, temos os seguintes mercados:

- 1) Mercado balcão (“over the counter” ou OTC)
- 2) Mercado balcão com Master Agreement (ainda OTC)
- 3) Mercado balcão organizado (registrado)
- 4) Mercado de pregão em bolsa

No Brasil

No Brasil, só são permitidas operações com derivativos no mercado balcão organizado ou no pregão de bolsas. Contratos particulares são de interpretação legal duvidosa.

Risco de Crédito

Em derivativos, o risco de crédito de uma parte é o valor da quantia devida pela contraparte em virtude da liquidação do contrato. Quanto mais favorável for a situação de uma parte no que tange ao risco de mercado (maior for o lucro esperado na operação), mais desfavorável será sua situação quanto ao risco de crédito.

2.2.5 Os Profissionais do Mercado de Derivativos

Os principais profissionais do mercado de derivativos são:

- 1) Operador (“trader”): é o profissional que executa as transações.
- 2) Estruturador: é o profissional que cria (estrutura) operações ou produtos complexos baseados nos contratos disponíveis no mercado.
- 3) “Book Runner”: é o profissional que maneja a carteira de posições em aberto de derivativos.
- 4) “Quant”: é um especialista em métodos matemáticos que modela os preços dos derivativos, bem como outras propriedades deles (por exemplo: a elasticidade do preço em relação aos fatores subjacentes).
- 5) Vendedor: No trato com clientes, é o profissional que vende o conceito do produto.
- 6) “Hedger”: quer dizer tanto: a) um “trader” que realiza apenas operações de proteção do ativo de uma empresa; ou b) um “book-runner” que tem por objetivo fazer ou manter uma carteira protegida, ou seja, neutralizar o máximo possível o impacto econômico das flutuações de mercado sobre as posições conjuntas de derivativos
- 7) “Market-maker”: é um “trader” que se compromete contratualmente com uma bolsa (ou outro organizador de mercado) a sempre fornecer possibilidades de negócios para participantes interessados em um determinado contrato.

2.2.6 Operações com derivativos

Qualquer operação com derivativos enquadra-se em um dos 4 casos:

- 1) Operações direcionais: os derivativos, por serem alavancados, substituíram os mercados físicos subjacentes nas operações de operações direcionais. Operações direcionais significa que uma parte tomará o risco integral da posição, objetivando um lucro se o mercado subjacente mover-se para o lado que prevê.
- 2) Operações financeiras: têm como único objetivo dar ou tomar dinheiro. Os derivativos são usados, pela sua propriedade de liquidação futura, para proporcionar o resgate do empréstimo.
- 3) “Hedge”: como os derivativos representam um risco subjacente, o uso de derivativos em uma posição contrária a uma posição já existente no mercado subjacente tem o efeito de reduzir ou eliminar a exposição a esse mercado. Hedge é o uso de derivativos para eliminar o efeito das flutuações indesejáveis de preço de ativo objeto que se possui e que é inconveniente desfazer-se.
- 4) Arbitragem: consiste em tomar posições opostas em derivativos e mercados subjacentes, de modo a capturar uma distorção de preços que porventura exista. Os preços dos derivativos são relacionados com os preços dos mercados subjacentes, e uma quebra nessa correspondência significa que há preços sub ou sobre-valorizados em um dos lados. O arbitrador visa a tirar partido dessas distorções.

2.2.7 Tipos de Derivativos

Futuros

Originaram-se das negociações a termo de mercadorias, isto é, das negociações onde o preço é definido em data atual, mas a liquidação (pagamento e entrega da mercadoria) ocorre em uma data futura. A família dos futuros inclui: futuros e termos. Com o advento da tecnologia de ajustes diários das bolsas, o nome “futuro” passou a designar apenas esse tipo de derivativo, ao passo que “termo” designa operações feitas para liquidação no vencimento. Qualquer que seja o tipo de liquidação, todos os futuros equivalem a uma exposição direta ao ativo subjacente.

Futuros são negociados por um preço futuro (F), que é o preço a que o negócio será realizado em data futura. O valor econômico de um contrato futuro no vencimento é S^*F , onde S^* é o preço do ativo objeto na data de vencimento. Na versão de liquidação física, o objeto do contrato é negociado entre as partes no vencimento pelo preço F . Na versão de liquidação por diferença, a parte compradora recebe da vendedora a quantia S^*F na data de vencimento (ou paga, se tal quantia for negativa).

Opções

Originaram-se de direitos de garantia de preço para a negociação futura. O titular da opção possui o direito de negociar o ativo objeto por um preço determinado (preço de exercício), mas, se desejar, poderá não exercer esse direito. A contraparte, o lançador da opção, tem a obrigatoriedade de aceitar o negócio, se o titular assim o quiser. Em compensação, o titular deve pagar um prêmio ao lançador, na data em que se firma o contrato. Dessa forma, o titular é chamado de comprador da opção, e o lançador de vendedor da opção. Existem opções tanto de compra quanto de venda. Na opção de compra, o titular tem o direito de comprar e o lançador tem a obrigação de vender o ativo. Na opção de venda, o titular tem o direito de vender, e o lançador tem a obrigação de comprar. Portanto, as posições elementares de opções são 4: compradora de opção de compra, compradora de opção de venda, vendedora de opção de compra e vendedora de opção de venda. O valor econômico de uma opção de compra na data de vencimento é $\max\{0, S - K\}$, onde K é o preço de exercício da opção. O valor econômico de uma opção de venda na data de vencimento é $\max\{S - K, 0\}$. Opções de compra também são chamadas “calls” e opções de venda chamadas “puts”.

Swaps

São contratos de troca de rentabilidade. Originaram-se de operações nas quais um intermediário assegurava a uma parte juros fixos na correção de um investimento originariamente feito a juros flutuantes, enquanto assegurava a uma segunda parte

juros flutuantes na correção de um investimento originariamente feito a juros fixos (ou vice-versa). O intermediário trocava o fluxo de caixa de ambas as partes, ficando com uma remuneração tirada do diferencial entre as taxas. Os swaps expandiram-se e hoje incluem não só taxas de juros como objetos, mas taxas de câmbio e índices de ações e de preços. O valor econômico de um swap genérico é $(I_1 - I_2)$, onde I_1 é a valorização do índice em que se está ativo, e I_2 é a valorização do índice em que se está passivo.

Derivativos de crédito

São contratos onde partes trocam valores financeiros dependendo de eventos relacionados ao crédito de uma terceira parte (que não é envolvida no contrato a não ser como referência).

2.2.8 Alguns mercados futuros específicos

Didaticamente, os mercados futuros são divididos quando ao tipo do ativo-objeto em: futuros sobre commodities, futuros sobre ações, futuros sobre índices de ações e futuros sobre moedas (sem falar em futuros de taxas de juros, que constituem um capítulo à parte). Esta divisão é adotada basicamente para diferenciar ativos de tipos de rendas diferentes. A divisão entre ativos com e sem renda, e entre renda paga e capitalizada, é mais geral, e por isso não é necessário aqui discutir separadamente os futuros sobre cada tipo de objeto. Contudo, o mercado futuro sobre índices de ações possui uma especificidade além dessa.

Índices de ações

Um índice de ações é o valor de uma carteira de ações teórica que pretende representar um determinado setor, um estilo de investimento, ou a totalidade do mercado acionário. Os índices são criados, mantidos e calculados por empresas de

consultoria [ex: Standards&Poors (McGraw-Hill)] ou por bolsas (ex: IBOVESPA), que estipulam quais ações e em quais quantidades estarão presentes no índice.

2.2.9 Futuro de IBOVESPA

É o principal derivativo ligado ao mercado acionário brasileiro. Seu objeto não é um ativo, e sim um índice, que é calculado como o preço de uma cesta de ativos. Sendo impossível garantir a entrega física de todos os ativos (ações) que compõem o índice, o futuro de IBOVESPA é liquidado apenas por diferença, com ajustes diários, sendo a cotação para liquidação final definida como o valor médio do IBOVESPA em determinado período do pregão.

Como não existe mercado de IBOVESPA à vista (o IBOVESPA é um índice computado com base nos preços de 54 ações, vide tabela 1.2), a arbitragem básica entre futuro e “spot” não vigora perfeitamente. Isso ocorre porque, no Brasil, não existem meios práticos de se executar uma ordem de compra ou venda de 54 ações simultaneamente a um preço dado. Logo, o ativo IBOVESPA só pode ser obtido por aproximação.

Caso o futuro apresente um ágio considerável em relação à sua cotação justa, um arbitrador poderá vendê-lo contra a compra de uma carteira de ações que se aproxime da carteira teórica do índice. Geralmente, utilizam-se carteiras de até 6 ações diferentes, tal que concentre 80% do índice. Isto só é possível no Brasil, devido à alta concentração do IBOVESPA em certas ações. (No exterior, os índices consistem em muito mais ações, mas a execução de ordens por computador permite que sejam negociadas muito mais ações, e simultaneamente). A carteira utilizada para arbitrar o índice poderá eventualmente descolar do IBOVESPA, o que introduz um risco à operação, e faz com que distorções entre o futuro e a cotação do IBOVESPA sejam toleradas.

Código	Ação	Tipo	Qtde. Teórica	Part. (%)
ACES4	ACESITA	PN *	86,25235034501	0,612
AMBV4	AMBEV	PN *	0,40765501584	1,314
ARCZ6	ARACRUZ	PNB	14,35471351543	0,589
BBDC4	BRADESCO	PN *	67,26444045150	4,322
BRAP4	BRADESPAR	PN *	97,56886578055	0,446
BBAS3	BRASIL	ON *	13,32969063297	1,414
BRTP3	BRASIL T PAR	ON *	3,89586774968	0,366
BRTP4	BRASIL T PAR	PN *	15,28746443902	1,749
BRTO4	BRASIL TELEC	PN *	26,30798383051	1,962
BRKM5	BRASKEM	PNA*	1,79706132859	0,408
CLSC6	CELESC	PNB	149,39674008072	0,474
CMIG3	CEMIG	ON *	0,64738526886	0,107
CMIG4	CEMIG	PN *	13,71233610069	3,153
CESP4	CESP	PN *	8,31478378337	0,491
CGAS5	COMGAS	PNA*	0,57813994969	0,391
CPLE6	COPEL	PNB*	32,15288323528	1,959
CRTP5	CRT CELULAR	PNA*	0,23858020975	0,687
ELET3	ELETROBRAS	ON *	7,24801794830	1,580
ELET6	ELETROBRAS	PNB*	20,28479257896	4,486
ELPL4	ELETROPAULO	PN *	4,11763142423	0,888
EMBR3	EMBRAER	ON	9,01866416931	0,654
EMBR4	EMBRAER	PN	26,16570885990	2,664
EBTP3	EMBRATEL PAR	ON *	23,02817181817	0,989
EBTP4	EMBRATEL PAR	PN *	145,60687243060	7,635
GGBR4	GERDAU	PN	5,93362340802	1,415
PTIP4	IPIRANGA PET	PN *	3,54771027842	0,247
ITAU4	ITAUBANCO	PN *	2,39316452367	3,028
ITSA4	ITAUSA	PN	73,02445012793	1,150
KLBN4	KLABIN S/A	PN	18,00611667192	0,306
LIGH3	LIGHT	ON *	0,85233682438	0,207
PLIM4	NET	PN	538,77098469098	2,750
PETR3	PETROBRAS	ON	6,23118693776	2,325
PETR4	PETROBRAS	PN	23,29178177837	8,159
SBSP3	SABESP	ON *	1,59557067443	1,128
CSNA3	SID NACIONAL	ON *	3,31207297858	2,064
CSTB4	SID TUBARAO	PN *	2,34426595393	0,872
CRUZ3	SOUZA CRUZ	ON	4,83250312915	0,701
TCSL3	TELE CL SUL	ON *	24,39845087104	0,420
TCSL4	TELE CL SUL	PN *	62,36903410448	1,277
TCOC4	TELE CTR OES	PN *	45,67879852917	2,130
TLCP4	TELE LEST CL	PN *	121,41448747793	0,391
TNEP4	TELE NORD CL	PN *	53,32543693779	1,146
TNLP3	TELEMAR	ON *	5,53407768684	0,944
TNLP4	TELEMAR	PN *	53,73721226382	11,880
TMAR5	TELEMAR N L	PNA*	7,00011705656	2,144
TMCP4	TELEMIG PART	PN *	50,88750906675	1,465
TLPP4	TELESP	PN *	3,99348582938	0,899
TSPP4	TELESP CL PA	PN *	159,19113376117	5,953
TBLE3	TRACTEBEL	ON *	5,81664221806	0,219
TRPL4	TRAN PAULIST	PN *	6,87784792764	0,449
USIM5	USIMINAS	PNA	17,23634088803	2,140
VCBA4	V C P	PN *	0,77034969214	0,624
VALE3	VALE R DOCE	ON	1,96240789932	1,332
VALE5	VALE R DOCE	PNA	4,81342863970	2,896
QUANTIDADE TEÓRICA TOTAL			2.076,1193297742	100,000
				9

Tabela 1.2- Empresas participantes do Índice BOVESPA

fonte: “site” da BOVESPA

Ao tentar reproduzir o IBOVESPA com uma carteira de menor número de ações, está-se criando um ativo que possui um comportamento diferente do IBOVESPA, ainda que fortemente correlacionado. A maioria das ações mais líquidas do índice são também mais arriscadas, já que variam mais do que o índice. Para adequar o risco de uma carteira ao do índice, e assim arbitrá-la contra o futuro, é preciso calcular o beta (**b**) da carteira (que pode ser feito somando os betas das ações multiplicados pelas suas quantidades) e reduzir a carteira nessa proporção. O **b** é o coeficiente angular da regressão linear entre os retornos de dois ativos.

Por exemplo: para ter-se o equivalente a R\$ 2 milhões de IBOVESPA à vista com uma carteira de **b** = 1,2, é preciso montar uma carteira no valor de $2 \div 1,2 = 1,7$ milhões.

Apreçamento do IBOVESPA futuro justo

Ações são ativos que admitem dois tipos de renda: dividendos e aluguéis. Portanto, o IBOVESPA futuro deveria espelhar ambos. A questão é que o IBOVESPA já inclui, em sua metodologia, os dividendos pagos pelas suas ações. Ou seja, um índice IBOVESPA+ 0% já é um índice igual às ações acrescidas dos dividendos obtidos. Já o futuro do índice é o futuro de IBOVESPA e não de uma carteira. Logo, o futuro não deve espelhar os dividendos, mas deve espelhar o aluguel das ações (hoje, em torno de 5%aa). Contudo, raramente o futuro será cotado justo, devido aos problemas inerentes à arbitragem, que já foram detalhados.

Proteção de uma carteira de ações

O uso mais comum do futuro de IBOVESPA para proteção é aquele em que se tem uma carteira não muito correlacionada com o índice. Isso porque uma carteira que seja espelho do índice geralmente é bastante líquida e não oferece problemas para ser negociada caso se deseje sair rapidamente do risco especulativo. Quando se possui uma carteira pouco líquida ou com papéis estratégicos, recorre-se a proteção com futuros de IBOVESPA para tentar eliminar o risco bolsa.

Nesse caso, há que se lembrar que o risco bolsa embutido na carteira pode ser na verdade o menor risco e suprimi-lo não significará eliminar a probabilidade de prejuízos. Eliminar o risco bolsa de uma carteira significa apenas desconectar os seus lucros e perdas dos movimentos do IBOVESPA.

O “hedge” de uma carteira de ações se faz na proporção do seu beta. Uma carteira de ações de valor financeiro R\$ 20 milhões e beta 0,30, por exemplo, é protegida contra risco bolsa pelo financeiro equivalente a $R\$ 20\text{ milhões} \times 0,30 = R\$ 6\text{ milhões}$ em futuros de IBOVESPA. Se o futuro de IBOVESPA estiver sendo negociado a 12.000 pontos, e o valor do ponto for de R\$ 3,00, tal posição equivale a $6.000.000 \div 12.000 \div 3 = 166$ lotes.

“Hedge” de mínima variância

O “hedge” de uma carteira de ações com futuros de índices é um “hedge” de mínima variância, isto é, seu objetivo é reduzir a variância dos resultados da carteira a um valor mínimo. Tudo o que se sabe desse valor mínimo, a priori, é que é menor que a variância da carteira sem o “hedge”, e que ocorre para uma certa quantidade de futuros vendidos. Quantidades tanto menores quanto maiores que a quantidade exata de “hedge” produzem uma variância maior do que a mínima.

Porém, a mínima variância pode ser, por exemplo, 99% da variância da carteira não protegida, isto é, mesmo o melhor “hedge” possível pode não melhorar em mais que 1% a situação de risco da carteira. O fator que mensura o quanto se pode reduzir do risco de uma carteira é a sua correlação com o índice: quanto maior a correlação, maior o potencial de redução de risco. A fórmula do percentual de risco residual que resulta de um “hedge” de mínima variância é:

$$\frac{\mathbf{s}_{final}}{\mathbf{s}_{original}} = \sqrt{1 - \mathbf{r}^2} \quad (1)$$

onde \mathbf{s}_{final} e $\mathbf{s}_{original}$ são, respectivamente, as volatilidades das carteiras com e sem “hedge”, e \mathbf{r} é a correlação entre a carteira inicial e o índice utilizado para fazer “hedge”.

Existem outros tipos de “hedge” que não o “hedge” de mínima variância, mas que só podem ser executados se o objeto do derivativo coincidir exatamente com o que estiver sendo protegido: o “hedge” perfeito e o “insurance” são outros dois tipos de “hedge” (este último só pode ser realizado com opções).

Depois de apresentado o mercado de derivativos e, principalmente, o mercado futuro de índice BOVESPA (índice utilizado no trabalho) será realizado logo a seguir uma breve discussão sobre temas relacionados a risco de mercado.

2.3 Risco – A Utilização do *VaR*

A metodologia *VaR* de mensuração de risco de mercado tornou-se padrão da indústria. *VaR* é um número que indica a perda possível de uma carteira para um determinado nível de probabilidade. Por exemplo, se o *VaR* de 1% de um banco é de USD 60.000.000, é porque existe uma probabilidade de 1% de suas perdas devidas à flutuação dos mercados superar USD 60.000.000 em um dia. Ou seja, em 99 entre 100 dias, o resultado do banco será melhor que uma perda de USD 60.000.000.

O *VaR* pode ser visto como o desvio-padrão de uma carteira expresso para um nível de probabilidade. Assim, é uma medida diretamente decorrente da volatilidade da carteira e da exposição da carteira (medida em valor financeiro). Grosso modo, pode-se dizer que:

$$VaR = vol * pos * k \quad (2)$$

onde *vol* é a volatilidade, *pos* é a posição retida em carteira e *k* é a constante que ajusta os níveis de confiabilidade e as unidades de medida do *VaR*, da volatilidade e da exposição. Por exemplo, se o *VaR* é diário para um nível de confiabilidade de 1%, e a volatilidade é anual, *k* é igual a 0,15 (2,45 desvios-padrão divididos pela raiz quadrada de 255 dias por ano). Assim, se um banco tem uma posição de USD 20.000.000 em um mercado de volatilidade 30% anual, seu *VaR* de 1% nessa posição é de aproximadamente $0,30 \times 20.000.000 \times 0,15 = \text{USD } 900.000$.

Existem 3 metodologias de cálculo do *VaR*:

- 1) Analítica: Baseia-se no cálculo da volatilidade da carteira, conhecendo-se as volatilidades de cada um de seus componentes e as correlações entre os seus retornos.
- 2) Histórica: Baseia-se em observar os n% piores resultados ocorridos no passado, assumindo a composição atual da carteira. Consiste em simular a carteira atual com os preços observados no passado.
- 3) Simulação Monte Carlo: Baseia-se em rodar simulações, conhecendo-se a volatilidade e correlação entre os ativos, sobre o futuro da carteira.

VaR analítico

Se se assumir que a) os retornos dos ativos em conjunto enquadram-se em uma distribuição normal multivariada (em que cada ativo pode ter correlação com todos os outros), a qual pode ser descrita por uma matriz de covariâncias **COV** (na qual o elemento $\text{cov}_{ij} = \mathbf{s}_i \mathbf{s}_j \mathbf{r}_{ij}$), e que b) as posições componentes de uma carteira podem ser descritas por um vetor exposição **Q** em que cada posição é representada por um valor financeiro (supõe-se que esse valor financeiro, multiplicado por uma variação de preço do ativo subjacente a ele, forneça o resultado (lucro ou perda) da posição diante de tal variação); então o *VaR* de uma carteira ao grau de confiabilidade y pode ser calculado analiticamente como:

$$\text{VaR}(y) = -\mathbf{f}^{-1}(y) [\mathbf{Q}^T \mathbf{COV} \mathbf{Q}]^{-\frac{1}{2}} \quad (3)$$

onde $\mathbf{f}^{-1}(y)$ é função inversa da distribuição de probabilidade normal acumulada associado a probabilidade y .

Por exemplo: calcular o *VaR*(1%), de um dia, de uma posição composta de R\$ 1.000.000 de Telebrás, R\$ 700.000 de Eletrobrás, vendida em R\$ 2.000.000 em futuros de IBOVESPA e comprada em R\$ 10.000.000 de dólar futuro. As

volatilidades anuais desses ativos são respectivamente, 46%, 63%, 32% e 18%. As correlações são dadas pela tabela:

	Telebrás	Eletrobrás	IBOVESA fut	Dólar futuro
Telebrás	1,00			
Eletrobrás	0,66	1,00		
IBOVESA fut	0,85	0,70	1,00	
Dólar futuro	-0,20	-0,10	-0,18	1,00

Tabela 1.3 – Correlações entre os ativos

Elaborado pelo autor

Logo, a matriz de covariâncias desses quatro ativos é dada por:

$$\text{COV} = \begin{pmatrix} 0,21 & 0,19 & 0,13 & -0,02 \\ 0,19 & 0,40 & 0,14 & -0,01 \\ 0,13 & 0,14 & 0,10 & -0,01 \\ -0,02 & -0,01 & -0,01 & 0,03 \end{pmatrix}$$

O “vetor exposição” é:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1.000.000 \\ 700.000 \\ -2.000.000 \\ 10.000.000 \end{pmatrix}$$

e o resultado da operação $[\mathbf{Q}^T \text{COV} \mathbf{Q}]^{\frac{1}{2}}$ é R\$ 1.831.000. Esta seria a oscilação da carteira em um ano para a significância de um desvio-padrão. Esse número tem que ser multiplicado por $-F^{-1}(99\%) = -2,32$ (que significa que o *VaR* desejado é a perda ocasionada por um movimento de 2,32 desvios-padrão de magnitude, que, admitindo-se retornos normais só é ultrapassado em 1% dos casos), e escalonado

para a unidade de medida dia dividindo-se pela raiz quadrada de 255. O resultado é - R\$ 266.000, que é o *VaR* de um dia, para a significância de 1%, da carteira dada.

***VaR* histórico**

No *VaR* histórico, utilizam-se séries de dados passados sobre os preços dos ativos que compõem a carteira. O resultado da carteira de hoje para um período futuro igual a um “holding period” é calculado várias vezes, considerando-se as variações de preço que ocorreram no passado aplicadas aos preços atuais. O *VaR* é igual ao percentil adequado da série de resultados assim calculados.

Críticas ao *VaR*

Os críticos do *VaR* atacam a metodologia argumentando que os valores a que ela chega, utilizando volatilidades e correlações históricas, não são boas indicações das oscilações que poderão ocorrer no futuro. Passada uma época relativamente calma, por exemplo, o *VaR* tenderia a reportar um risco menor que o existente pela frente, e vice-versa; passada uma época muito volátil, o *VaR* tenderia a superestimar o risco futuro. Além disso, em casos de estresse, a estrutura de correlações que o mercado exibe em períodos mais calmos é bruscamente alterada. Em suma: o *VaR* não serviria para evitar perdas catastróficas, causadas por situações de estresse, e teria a desvantagem de causar um falso conforto dos profissionais em relação às suas posições.

Os impactos de uma situação de estresse carteira de investimentos podem ser analisados através de um teste de estresse. Entretanto, este não foi planejado para cobrir o comportamento médio dos mercados financeiros. Logo, percebe-se que o *VaR* de uma carteira de investimentos não elimina as deficiências de um teste de estresse, nem os procedimentos do último suprem as fraquezas do primeiro.

Uma tentativa de contornar tal situação é a utilização da Teoria dos Valores Extremos na análise de risco. A Teoria dos Valores Extremos trabalha, como o próprio nome sugere, com a distribuição apenas dos valores extremos de uma amostra, ou

seja apenas trabalha com os dados pertencentes às caudas da distribuição da amostra. Deste modo, consegue-se entender o comportamento médio dos valores extremos que, certamente são oriundos de períodos de grande estresse no mercado. Na próxima seção é feita a apresentação da Teoria dos Valores Extremos.

2.4 Teoria dos Valores Extremos

2.4.1 Introdução

O uso da Teoria dos Valores Extremos (“Extreme-Value Theory”) permite estimar probabilidades e quantis com razoável precisão nos limites dos valores encontrados dentro da amostra, e mesmo além deles. A explícita modelagem dos valores extremos corresponde a um ajuste apenas da cauda da distribuição dos dados originais, ressaltando o caráter pouco informativo que pode ter o interior da distribuição para ocorrências de baixíssima freqüência.

2.4.2 Desenvolvimento Teórico

Mesmo não sendo crucial para o desenvolvimento do trabalho, o autor acha necessário a apresentação realizada nesta seção, pois destaca como resultado central o Teorema de Fisher-Tippett, que especifica a forma da distribuição limite para máximos/mínimos valores centrados e normalizados.

Seja X_1, X_2, \dots, X_n uma amostra de variáveis aleatórias não degeneradas, independentes e identicamente distribuídas (Bilingsley(1986)) com função de distribuição acumulada comum F_x . Defina Y_n e Z_n como o máximo e o mínimo amostral, respectivamente.

$$Y_n = \text{Max}(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (4)$$

$$Z_n = \text{Min}(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (5)$$

Por convenção costuma-se apresentar a EVT (“Extreme-Value Theory”) para o caso dos máximos. Contudo, todo resultado obtido para o máximo também vale para o mínimo, bastando lembrar que:

$$\text{Max}(X_1, X_2, \dots, X_n) = -\text{Min}(-X_1, -X_2, \dots, -X_n) \quad (6)$$

A função de distribuição acumulada do máximo amostral Y_n pode ser obtida da seguinte forma:

$$\Pr\{Y_n \leq x\} = \Pr\{X_1 \leq x, X_2 \leq x, \dots, X_n \leq x\} = \prod_{i=1}^n \Pr\{X_i \leq x\} = (F_x(x))^n. \quad (7)$$

Seja $\mathbf{c}_F = \text{Sup}\{x \in \mathfrak{R} : F_x(x) < 1\}$ o limite superior de F_x . Então, para todo $x < \mathbf{c}_F$ tem-se que $\Pr\{Y_n \leq x\} = (F_x(x))^n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

Mais ainda, se $\mathbf{c}_F < \infty$, para todo $x \geq \mathbf{c}_F$, $\Pr\{Y_n \leq x\} = (F_x(x))^n = 1$.

Segue que, como $Y_n \rightarrow \mathbf{c}_F$ quase certamente quando $n \rightarrow \infty$, a distribuição limite exata de Y_n é degenerada (Embrechts *et al.*(1997)), o que não traz muitos ganhos em termos práticos.

Felizmente, para algumas distribuições F_x existe um resultado similar ao Teorema Central do Limite (Billingsley(1986) que fornece resultados de convergência fraca para máximos centrados e normalizados: O Teorema de Fisher-Tippett.

As distribuições dos valores extremos são obtidas como distribuições limites dos máximos de variáveis aleatórias. Para tal, considera-se o máximo centrado e normalizado $\frac{Y_n - \mathbf{m}_n}{\mathbf{s}_n}$, onde $\mathbf{s}_n > 0$ e $\mathbf{m}_n \in \mathfrak{R}$ são constantes que dependem do tamanho da amostra n . Para obter a distribuição limite de $\frac{Y_n - \mathbf{m}_n}{\mathbf{s}_n}$, F_y , tem-se que calcular probabilidades da seguinte forma:

$\lim \Pr \left\{ \frac{Y_n - \mathbf{m}_n}{\mathbf{s}_n} \leq x \right\}$ quando $n \rightarrow \infty$, que podem ser reescritas como
 $\lim \Pr \{Y_n \leq u_n\}$ quando $n \rightarrow \infty$, onde $u_n = u_n(x) = \mathbf{s}_n x + \mathbf{m}_n$.

Tipicamente, F_x deve satisfazer a certas condições em \mathbf{c}_F e sua cauda direita para assegurar que $\lim \Pr \{Y_n \leq u_n\}$ quando $n \rightarrow \infty$ existe para uma constante apropriada $u_n(x)$ (Embrechts et al. (1997), Gumbel(1958)). Por exemplo, a distribuição limite do máximo de qualquer distribuição F_x com um salto no limite superior finito é degenerada.

Segundo o Teorema de Fisher-Tippett (Fisher and Tippett(1928)), se existe tal distribuição não degenerada F_y , esta deve ser necessariamente um dos três tipos de distribuições de valores extremos padronizadas a seguir:

1. Distribuição de Gumbel, definida como

$$F_y(y) = \exp \{-\exp \{-y\}\} \text{ para } y \in \mathfrak{R} \quad (9)$$

2. Distribuição de Fréchet(k), definida como

$$\begin{aligned} F_y(y; k) &= 0 & \text{se } y < 0, \\ F_y(y; k) &= \exp \left\{ -y^{-k} \right\} \text{ se } y \geq 0, \end{aligned} \quad (10)$$

onde $k > 0$.

3. Distribuição de Weibull(k), definida como

$$\begin{aligned} F_y(y; k) &= \exp \left\{ -(-y)^{-k} \right\} & \text{se } y < 0, \\ F_y(y; k) &= 1 & \text{se } y \geq 0, \end{aligned} \quad (11)$$

onde $k < 0$.

A questão agora é para quais constantes \mathbf{m}_n e \mathbf{s}_n , e distribuições F_x , ocorre a convergência

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr \left\{ \frac{Y_n - \mathbf{m}_n}{\mathbf{s}_n} \right\} = F_y. \quad (12)$$

Para responder a pergunta acima é introduzido o conceito de Domínio Máximo de Atração (MDA – *Maximum Domain of Attraction*). Diz-se que a distribuição de uma variável aleatória pertence ao MDA de uma das três distribuições de valores extremos ((9),(10) e (11)), se existem constantes $\mathbf{m}_n \in \mathfrak{R}$ e

$$\mathbf{s}_n > 0, \text{ tal que } \frac{Y_n - \mathbf{m}_n}{\mathbf{s}_n} \xrightarrow{d} F_y.$$

Gnedenko (1943) estabeleceu condições necessárias e suficientes para Y_n pertencer ao MDA de um dos três tipos de distribuições limites.

Primeiramente, definiu-se a função inversa distribuição acumulada F_x como:

$$F^{-1}(p) = \inf \{x \in \mathfrak{R} : F_x \geq p\}, 0 < p < 1. \quad (13)$$

Usando esta notação o p -quantil de F_x é definido como

$$x_p = F^{-1}(p), 0 < p < 1. \quad (14)$$

De acordo com Gnedenko, a convergência em (12) é assegurada se F_x satisfizer as seguintes condições:

1) Para distribuição Gumbel,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} n[1 - F_x(\mathbf{s}_n x + \mathbf{m}_n)] = e^{-x}, \forall x \in \mathfrak{R}, \quad (15)$$

onde $\mathbf{s}_n > 0$.

Algumas distribuições satisfazem esta condição, tais como: normal, lognormal, exponencial, gama e logística. Uma possível escolha para as constantes normalizadoras é $\mathbf{m}_n = a(\mathbf{s}_n)$ e $\mathbf{s}_n = F_x^{-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$, onde $a(\cdot)$ é uma função positiva e absolutamente contínua (Embrechts *et al.* (1997)).

2) Para a distribuição Fréchet,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 - F_x(tx)}{1 - F_x(t)} = x^{-k}, \quad \forall x > 0, \quad (16)$$

onde $k > 0, t > 0$.

A condição acima é satisfeita pelas distribuições Cauchy, *t*-Student, Pareto, Burr e loggama. As constantes podem ser escolhidas como $\mathbf{m}_n = 0$ e $\mathbf{s}_n = F_x^{-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$.

3) Para a distribuição Weibull

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 - F_x(tx + \mathbf{c}_F)}{1 - F_x(x + \mathbf{c}_F)} = t^{-k}, \quad \forall t > 0, \quad (17)$$

ou seja, se varia regularmente no infinito.

A condição acima é satisfeita pelas distribuições beta e uniforme. As constantes podem ser escolhidas como $\mathbf{m}_n = \mathbf{c}_F$ e $\mathbf{s}_n = \mathbf{c}_F - F_x^{-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$.

2.4.3 Gumbel, Fréchet e Weibull: As Três Distribuições de Valores Extremos

As funções de distribuição padrão de valores extremos são, novamente:

$$\text{Gumbel: } F_y(y) = \exp\{-\exp\{-y\}\} \text{ para } y \in \mathfrak{R}. \quad (18)$$

$$\text{Fréchet } (k): F_y(y; k) = \begin{cases} 0, & y \leq 0, \\ \exp\{-y^{-k}\}, & y > 0, \end{cases} \quad k > 0, \quad (19)$$

$$\text{Weibull } (k): F_y(y; k) = \begin{cases} \exp\{-(-y)^{-k}\}, & y < 0, \\ 1, & y \geq 0, \end{cases} \quad k < 0, \quad (20)$$

E as respectivas funções densidade de probabilidade de valores extremos padronizadas são:

$$\text{Gumbel: } f_y(y) = \exp\{-y\} \exp\{-\exp\{-y\}\} \text{ para } y \in \mathfrak{R}. \quad (21)$$

$$\text{Fréchet } (k): f_y(y; k) = \begin{cases} 0, & y \leq 0, \\ ky^{-k-1} \exp\{-y^{-k}\}, & y > 0, \end{cases} \quad k > 0, \quad (22)$$

$$\text{Weibull } (k): f_y(y; k) = \begin{cases} -k(-y)^{-k-1} \exp\{-(-y)^{-k}\}, & y < 0, \\ 0, & y \geq 0, \end{cases} \quad k < 0, \quad (23)$$

A figura 2.1 mostra as densidades das três distribuições de valores extremos padronizadas: a distribuição Gumbel, a distribuição Fréchet com $k = 2$ e a distribuição Weibull com $k = -2$.

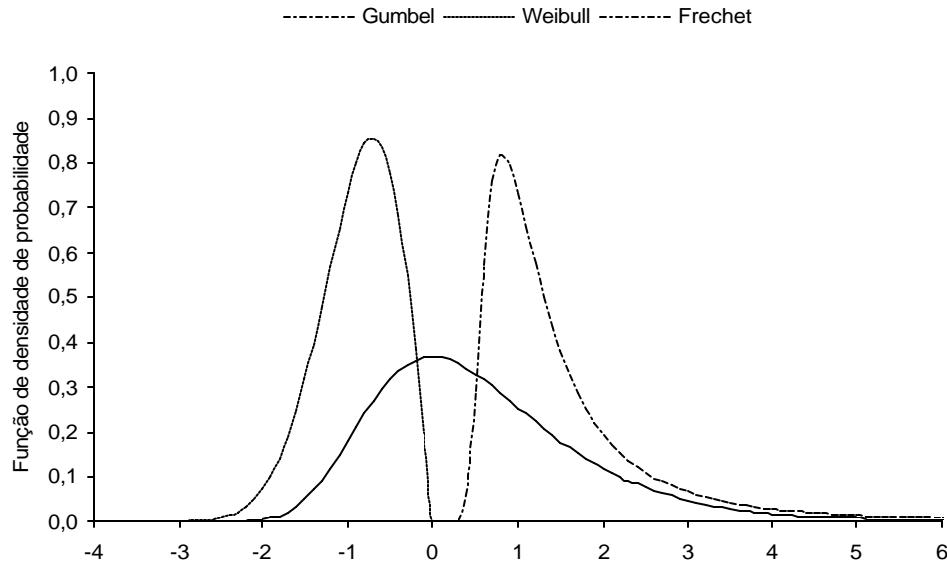


Figura 2.1-Distribuições de Probabilidade: Fréchet, Gumbel e Weibull

Elaborado pelo autor

É importante notar que, conforme ilustrado na figura 2.1, a distribuição Fréchet é limitada inferiormente, a distribuição Weibull é limitada superiormente, enquanto a distribuição Gumbel é ilimitada em ambos os sentidos.

O parâmetro de forma k está relacionado com a densidade da cauda da distribuição F_x (Jenkinson(1955)). Os valores extremos constituem, dadas algumas condições as caudas direita e esquerda da distribuição F_x , entretanto eles seguem as distribuições F_Y apresentadas anteriormente. Tipicamente, sempre que as caudas de F_x decaem exponencialmente, F_Y corresponde a distribuição Gumbel. Além disto, sempre que o suporte da distribuição F_x é limitado a direita, F_Y pertence a classe das distribuições Weibull(k). Em ambos os casos todos os momentos de F_x são finitos. Finalmente, sempre que F_x tem caudas pesadas e $C_F = \infty$, F_Y pertence a classe das distribuições Fréchet, e o parâmetro k corresponde a ordem máxima dos momentos finitos de F_x . Por exemplo se F_x é uma t -Student com 4 graus de liberdade, F_Y corresponde a uma Fréchet. Neste caso a assimetria está bem definida, mas a curtose não. Os resultados permanecem válidos para processos estacionários.

Nas figuras 2.2 e 2.3 observa-se o formato das distribuições de densidade de probabilidade dado diversos valores de k para a distribuição Weibull e para a distribuição Fréchet respectivamente.

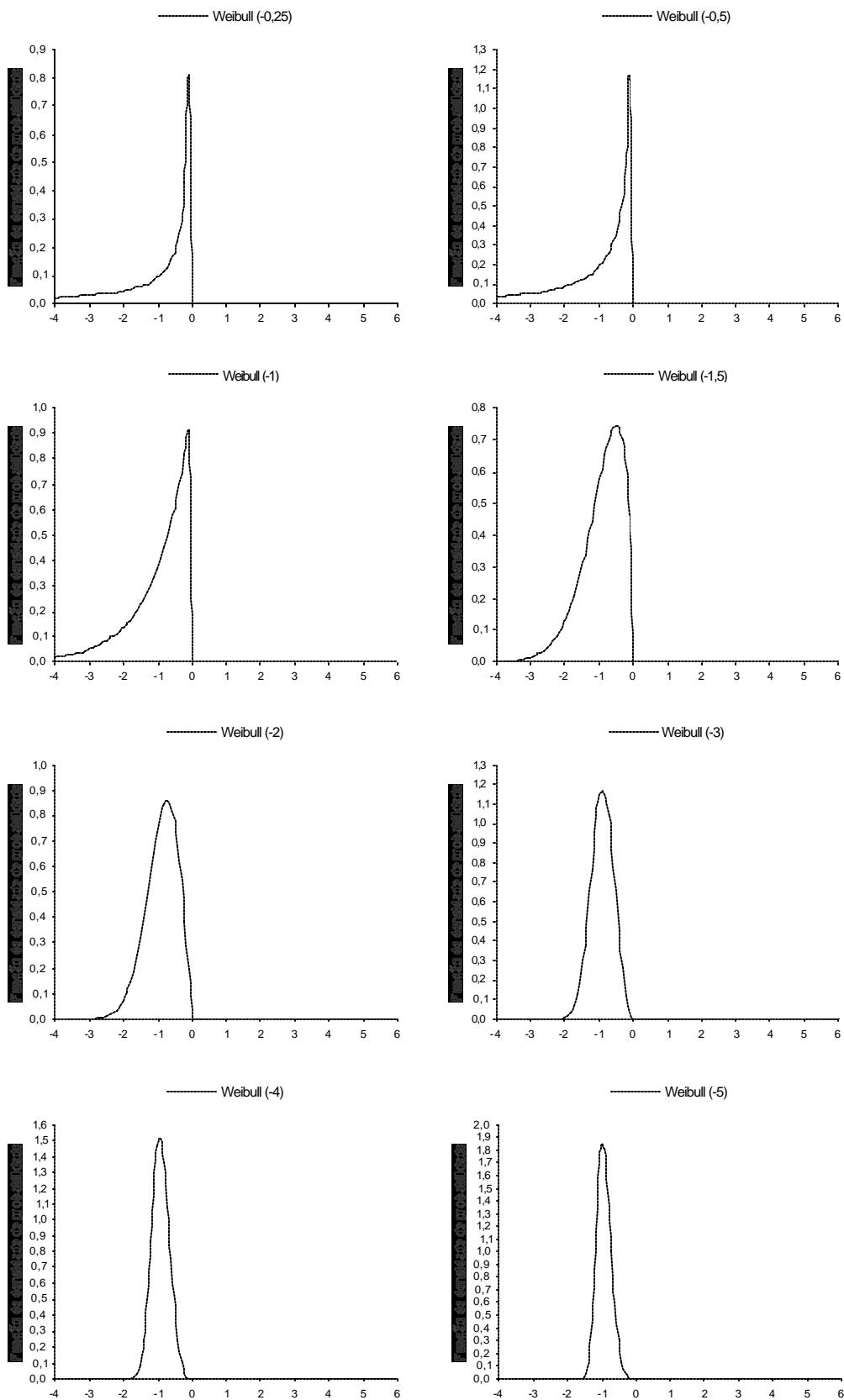


Figura 2.2-Funções Densidades de Probabilidades Weibull Padrão para $k=-0,25$, $k=-0,5$, $k=-1,0$, $k=-1,5$, $k=-2,0$, $k=-3,0$, $k=-4,0$ e $k=-5,0$

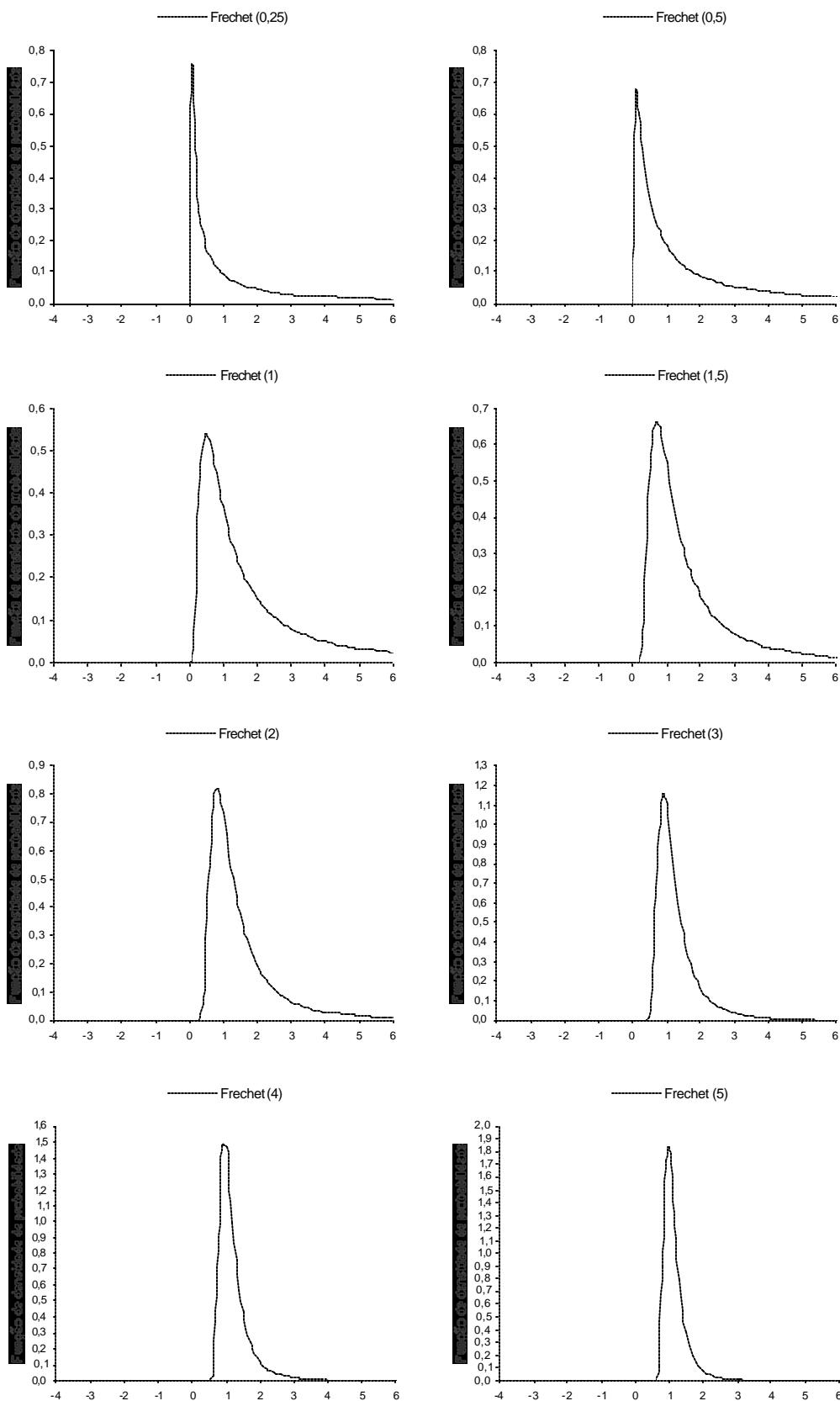


Figura 2.3-Funções Densidades de Probabilidades Fréchet Padrão para $k=0,25$,

$k=0,5$, $k=1,0$, $k=1,5$, $k=2,0$, $k=3,0$, $k=4,0$ e $k=5,0$

Elaborado pelo autor

Pode-se observar nas figuras 2.2 e 2.3 que quanto menor o valor absoluto de k , mais pesada é a cauda da função densidade de probabilidade. Outra observação relevante é a forma similar a uma função densidade de probabilidade normal que a função de densidade de probabilidade padrão Weibull adquire para $|k|=3$. Mais precisamente (Johnsons *et al.* 1994)), para $|k|=3,6$ a função densidade de probabilidade Weibull apresenta assimetria 0,00 e curtose 2,72, ou seja, apresenta mesma assimetria que a função densidade de probabilidade normal padrão e curtose 9,33% menor, o que caracteriza a extrema similaridade entre os formatos das mesmas.

O MDA da distribuição Gumbel abrange as distribuições com caudas variando de moderadamente pesadas a leves, como as distribuições normal, lognormal, exponencial, e gama, já mencionadas anteriormente. Aqui, $c_F < \infty$ ou $c_F = \infty$.

O MDA da distribuição Weibull compreende funções de distribuição acumulada com suporte limitado à direita ($c_F < \infty$), como as distribuições beta e uniforme. Portanto, não deve ser a melhor escolha para modelar eventos extremos em finanças.

No caso do MDA da distribuição de Fréchet as distribuições possuem caudas pesadas, como a distribuição Cauchy, t-Student, Pareto, Burr e loggama. Portanto, este tipo de distribuição deve ser a mais apropriada para séries de retornos do índice BOVESPA.

Embora para fins de modelagem estatística as três distribuições de valores extremos sejam bem distintas, do ponto de vista matemático elas estão intimamente ligadas. A título de ilustração apresenta-se a relação entre as distribuições de valores extremos obtida para uma variável aleatória $Y>0$:

$$\text{Se } Y \sim \text{Fréchet} \Leftrightarrow \ln Y \sim \text{Gumbel} \Leftrightarrow -Y^{-1} \sim \text{Weibull} \quad (24)$$

2.4.4 A Distribuição GEV Padrão(Generalized Extreme Value)

Jenkinson(1955) propôs uma expressão única para representar os três tipos de distribuições de valores extremos: a distribuição GEV (Generalized Extreme Value), cuja função densidade de probabilidade acumulada é expressa por:

$$F_Y(y; \mathbf{x}) = \begin{cases} \exp\left\{-\left(1 + \mathbf{x}y\right)^{-1/\mathbf{x}}\right\} & \mathbf{x} \neq 0 \\ \exp\left\{-\exp\left\{-y\right\}\right\} & \mathbf{x} = 0 \end{cases}, \quad (25)$$

onde $1 + \mathbf{x}y > 0$. Em (25) o índice de cauda, \mathbf{x} , é tal que $\mathbf{x} = \frac{1}{k}$ (veja (10) e (11)).

A distribuição Gumbel refere-se a $\mathbf{x} = 0$; a distribuição Fréchet quando $\mathbf{x} > 0$, e a distribuição Weibull com $\mathbf{x} < 0$.

2.4.5 A Distribuição GEV Não-Padronizada

A distribuição GEV definida em (26) está padronizada, ou seja, é definida para valores normalizados pelas constantes normalizadoras \mathbf{m}_n e \mathbf{s}_n . Como, estas constantes são desconhecidas, pode-se definir a GEV não padronizada, ou seja, a GEV com três parâmetros, cuja função densidade de probabilidade acumulada é:

$$G_X(x; \mathbf{x}, \mathbf{m}, \mathbf{s}) = \begin{cases} \exp\left\{-\left(1 + \mathbf{x}\frac{x - \mathbf{m}}{\mathbf{s}}\right)^{-1/\mathbf{x}}\right\} & \mathbf{x} \neq 0 \\ \exp\left\{-\exp\left\{-\frac{x - \mathbf{m}}{\mathbf{s}}\right\}\right\} & \mathbf{x} = 0 \end{cases}, \quad (26)$$

onde $1 + \mathbf{x}\frac{x - \mathbf{m}}{\mathbf{s}} > 0$. O parâmetro \mathbf{x} é conhecido como parâmetro de forma, \mathbf{m} como parâmetro de deslocamento e \mathbf{s} como parâmetro de escala.

A função densidade de probabilidade GEV não padronizada é dada por:

$$g_x(x; \mathbf{x}, \mathbf{m}, \mathbf{s}) = \begin{cases} \frac{1}{s} \left(1 + \mathbf{x} \frac{x - \mathbf{m}}{s}\right)^{-\frac{1}{x}-1} \exp\left(-\left(1 + \mathbf{x} \frac{x - \mathbf{m}}{s}\right)^{-\frac{1}{x}}\right) & \mathbf{x} \neq 0 \\ \frac{1}{s} \exp\left(-\frac{x - \mathbf{m}}{s}\right) \exp\left(-\exp\left(-\frac{x - \mathbf{m}}{s}\right)\right) & \mathbf{x} = 0 \end{cases}, \quad (27)$$

onde $1 + \mathbf{x} \frac{x - \mathbf{m}}{s} > 0$.

A distribuição GEV será utilizada para caracterizar as caudas da distribuição do índice BOVESPA. Logo, para que isto seja possível é necessário estimar os três parâmetros caracterizadores da distribuição GEV para o caso particular em estudo.

2.5 Estimação de Parâmetros

Neste trabalho é utilizado o método de máxima verossimilhança para estimar o parâmetro de forma \mathbf{x} , o parâmetro de locação \mathbf{m} , e o parâmetro de escala \mathbf{s} da distribuição GEV.

O método de estimação por máxima verossimilhança (“Maximum Likelihood Estimation”-MLE) é um dos muitos métodos existentes usados para estimação de parâmetros. Existem outros métodos como: mínimos quadrados ordinários, mínimos quadrados generalizados, mínimos quadrados com balanceamento iterativo e o método dos momentos, também conhecido como método dos L-momentos.

O método de máxima verossimilhança foi escolhido dentre os citados pois apresenta propriedades assintóticas interessantes (Jorgensen, 1983), tais como:

- Os estimadores de máxima verossimilhança são assintoticamente normalmente distribuídos.
- Os estimadores de máxima verossimilhança apresentam assintoticamente mínima variância.

- Os estimadores de máxima verossimilhança são assintoticamente não viesados.
- Transformações lineares dos estimadores de máxima verossimilhança também são estimadores de máxima verossimilhança.

O método de estimação de parâmetros por máxima verossimilhança é baseado em uma densa teoria, originalmente desenvolvida por R. A. Fischer. O método é explicado a seguir.

Dada uma amostra aleatória y_1, y_2, \dots, y_n , de valores independentes que seguem uma distribuição $f(y_1, y_2, \dots, y_n | \mathbf{q})$ governada por um parâmetro desconhecido, no caso \mathbf{q} . A probabilidade de obter tal amostra de valores dado um valor de \mathbf{q} é dada pela função verossimilhança, expressa a seguir:

$$L = \prod_{i=1}^n f(y_i | \mathbf{q}) \quad (28)$$

Como \mathbf{q} é usualmente desconhecido, tem-se que estimá-lo através da amostra. Como estimativa de \mathbf{q} escolhe-se o valor $\hat{\mathbf{q}}$, o qual maximiza a expressão de verossimilhança da amostra. Este processo de encontrar valores estimados para parâmetros desconhecidos é chamado de estimação de máxima verossimilhança. Estimadores obtidos desta maneira são conhecidas estimadores de máxima verossimilhança

O principal objetivo da estimação de máxima verossimilhança é encontrar valores de parâmetros que maximizem a verossimilhança da amostra, L , a qual pode ser vista como sendo a distribuição de probabilidade conjunta da amostra. A função de verossimilhança proporciona um valor que é proporcional a densidade conjunta de obter tais valores observados. Assumindo observações independentes, os componentes individuais da função de verossimilhança podem ser multiplicados seguindo a regra geral da distribuição conjunta de probabilidades de eventos independentes.

Muitas vezes, achar o máximo de função não é uma tarefa fácil sendo necessário a aplicação do logaritmo na função. Como a aplicação do logaritmo é uma transformação estritamente monotônica, o conjunto de valores que maximiza L também maximiza $\log L$, neste caso:

$$\log L = \sum_{i=1}^n \log f(y_i | \mathbf{q}) \quad (29)$$

No caso, que envolve somente um parâmetro, o máximo é alcançado quando a variação de $\log L$ em relação a \mathbf{q} torna-se zero. Esta é a condição de primeira ordem. Matematicamente, esta condição é expressa como:

$$\frac{\partial \log L}{\partial \mathbf{q}} = 0 \quad (30)$$

A solução desta equação é estimador de máxima verossimilhança que será denotada por $\hat{\mathbf{q}}$.

Para assegurar que $\log L$ é maximizado quando resolvido para \mathbf{q} , a tangente de $\log L$ tem que tender a zero nas proximidades da estimativa de máxima verossimilhança. Esta é a condição de segunda ordem, dada pela expressão abaixo:

$$\frac{\partial^2 \log L}{\partial \mathbf{q}^2} < 0 \quad (31)$$

A figura 2.4 abaixo descreve os princípios da estimação de máxima verossimilhança para um único parâmetro, \mathbf{q} .

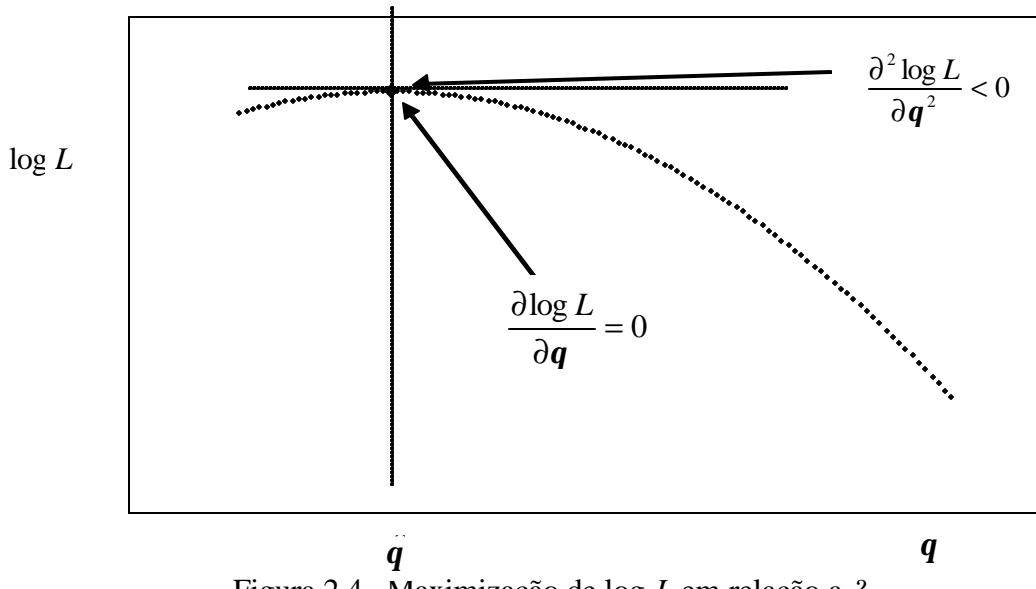


Figura 2.4– Maximização de $\log L$ em relação a \mathbf{q}

Elaborado pelo autor

Pode-se generalizar o método de estimação de máxima verossimilhança para o caso em que há mais de um parâmetro desconhecido, ou seja, quando $\mathbf{q} = (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_K)$ é um vetor $K \times 1$ de parâmetros que descreve a função densidade de probabilidade.

Neste caso é necessário encontrar o vetor das derivadas parciais de $\log L$ em relação a \mathbf{q} ,

$$\mathbf{U}(\mathbf{q}) = \frac{\partial \log L(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \quad (32)$$

Sendo u_k a derivada parcial de $\log L$ em relação a \mathbf{q}_k , tem –se:

$$u_k = \frac{\partial \log L(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}_k} \quad (k = 1, \dots, K) \quad (33)$$

O próximo passo é igualar cada uma destas equações a zero e resolver para \mathbf{q}_k , ou seja,

$$u_k = \frac{\partial \log L(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}_k} = 0 \quad (k = 1, \dots, K) \quad (34)$$

Tem-se aqui um sistema de equações com K equações e K incógnitas. $\mathbf{U}(?)$ é o vetor $K \times 1$ das primeiras derivadas chamado de função “score” (ou vetor “score”) e u_k , para $k = (1, 2, \dots, K)$, são os elementos do vetor “score”.

Para se ter certeza que as condições de primeira ordem representam máximos, é necessário que a segunda derivada de $\log L$ em relação a $?$ seja uma matriz negativa, ou seja:

$$\mathbf{H}(?) = \frac{\partial^2 \log L(?)^2}{\partial ? \partial ?'} < 0 \quad (35)$$

Sendo h_{kl} a segunda derivada de $\log L$ em relação a \mathbf{q}_k e \mathbf{q}_l , então:

$$h_{kl} = \frac{\partial^2 \log L(?)^2}{\partial \mathbf{q}_k \partial \mathbf{q}_l} < 0 \quad (k = 1, \dots, K) \quad (l = 1, \dots, K). \quad (36)$$

Muitas vezes a solução do sistema de equações $u_k = \frac{\partial \log L(?)^2}{\partial \mathbf{q}_k} = 0$, onde

$(k = 1, \dots, K)$, não é trivial, dada a dificuldade ou mesmo impossibilidade de se isolar os termos \mathbf{q}_k . Quando isto ocorre é necessário recorrer a processos numéricos iterativos.

Por processos iterativos (Humes *et al.*(1984)) entende-se um processo que calcula uma seqüência de aproximações x_1, x_2, \dots, x_n da solução desejada. O cálculo de uma nova aproximação é feito utilizando aproximações anteriores. Devem ser fornecidas as aproximações iniciais que o processo exigir. Existem vários métodos iterativos, como o método da dicotomia ou bissecção, o método das substituições ou aproximações sucessivas e o método de Newton-Raphson ou das Tangentes.

No estudo em questão utilizou-se o método de Newton-Raphson.

Neste caso, partindo-se das estimativas iniciais, as estimativas dos parâmetros são sucessivamente recalculadas. Este processo iterativo termina quando as diferenças entre as estimativas da nova iteração e as estimativas da iteração anterior

sejam insignificantes, ou atinjam valores pré-estabelecidos. Sendo $\hat{\theta}^{(t)}$ as estimativas na t -ésima iteração, as estimativas são obtidas como segue:

$$\hat{\theta}^{(t)} = \hat{\theta}^{(t-1)} + [\mathbf{I}(\hat{\theta}^{(t-1)})]^{-1} \mathbf{U}(\hat{\theta}^{(t-1)}). \quad (37)$$

onde $\mathbf{I}(\theta) = -\mathbf{H}(\theta)$.

A matriz de variância-covariância assintótica das estimativas é o inverso da matriz de informação, $[\mathbf{I}(\hat{\theta})]^{-1}$, obtida através da última iteração realizada. Os estimadores de máxima verossimilhança, $\hat{\theta}$, são normalmente distribuídas, com matriz de variância-covariância iguais aos elementos do inverso da matriz de informação. O valor $\frac{\hat{\theta}}{\text{Diag} \sqrt{[\mathbf{I}(\hat{\theta})]^{-1}}}$ segue uma distribuição normal padrão assintótica, ou z-distribuição. Este fato é relevante na condução de testes de significância nos parâmetros individuais (como a matriz de variância-covariância de $\hat{\theta}$ é construída a partir de quantidades estimadas, utiliza-se t-teste).

Novamente, a matriz de informação $\mathbf{I}(\theta)$ é o oposto da matriz $K \times K$ formada pelos elementos h_{kl} , sendo que em alguns casos, é possível obter esta matriz diretamente. Em outros uma aproximação razoável de $-\mathbf{H}(\theta)$ pode ser obtida. Uma aproximação pode ser o produto direto do vetor gradiente (ou funções “score” individuais).

Se $\log L_i$ é a contribuição do i -ésimo indivíduo para a log-verossimilhança da amostra em estudo, a matriz $n \times K$ das primeiras derivadas (ou funções “score” individuais) é chamada de vetor gradiente $\mathbf{g}(\theta)$. A matriz de informação estimada pode ser obtida então através do seguinte produto cruzado:

$$\mathbf{I}(\theta) = \mathbf{g}(\theta)' \mathbf{g}(\theta) \quad (38)$$

A raiz quadrada da diagonal da inversa da matriz de informação provê os erros padrão das estimativas de máxima verossimilhança. Ou seja, $\mathbf{I}(\theta)^{-1}$ é a matriz

assintótica de variância-covariância de $\hat{\theta}$. Os elementos da diagonal desta são $\text{var}(\hat{\theta})$. Como as estimativas de máxima verossimilhança são assintoticamente normalmente distribuídas, esta informação também pode ser usada para construir intervalos de confiança ao redor de θ .

2.6 Aplicação da Estimação de Parâmetros

Assumindo que os valores extremos dos retornos diários do índice BOVESPA seguem uma distribuição GEV, é necessário estimar os parâmetros $\mathbf{x}, \mathbf{m}, \mathbf{s}$.

No caso em estudo a função de verossimilhança é dada por :

$$L(x; \mathbf{x}, \mathbf{m}, \mathbf{s}) = \prod_i^n f_x(x_i; \mathbf{x}, \mathbf{m}, \mathbf{s}) I_{\left(1 + \mathbf{x} \frac{x_i - \mathbf{m}}{\mathbf{s}}\right) > 0} \quad (39)$$

onde $I(\cdot)$ é a função indicadora. Logo, a função de log-verossimilhança é dada por

$$\log L(x; \mathbf{x}, \mathbf{m}, \mathbf{s}) = \log \prod_i^n f_x(x_i; \mathbf{x}, \mathbf{m}, \mathbf{s}) I_{\left(1 + \mathbf{x} \frac{x_i - \mathbf{m}}{\mathbf{s}}\right) > 0} \quad (40)$$

a qual necessita ser maximizada em relação a $\theta = (\mathbf{x}, \mathbf{m}, \mathbf{s})$ para se chegar a estimativa $\hat{\theta}$.

Fazendo algumas simplificações,

$$\begin{aligned} \log \prod_{i=1}^n (f_x(x, \mathbf{m}, \mathbf{s}; x)) &= \sum_{i=1}^n \log(f_x(x, \mathbf{m}, \mathbf{s}; x)) \Rightarrow \\ &\left(n \log\left(\frac{1}{\mathbf{s}}\right) + \sum_{i=1}^n \log\left(\left(1 + \mathbf{x} \frac{x_i - \mathbf{m}}{\mathbf{s}}\right)^{-1/\mathbf{x}-1}\right) - \sum_{i=1}^n \left(1 + \mathbf{x} \frac{x_i - \mathbf{m}}{\mathbf{s}}\right)^{-1/\mathbf{x}} \right) \end{aligned} \quad (41)$$

Logo,

maximizando

$$n \log \left(\frac{1}{\mathbf{s}} \right) + \sum_{i=1}^n \log \left(\left(1 + \mathbf{x} \frac{\mathbf{x}_i - \mathbf{m}}{\mathbf{s}} \right)^{-1/\mathbf{x}-1} \right) - \sum_{i=1}^n \left(1 + \mathbf{x} \frac{\mathbf{x}_i - \mathbf{m}}{\mathbf{s}} \right)^{-1/\mathbf{x}} \text{ estamos maximizando}$$

$\log L(\mathbf{x}; \mathbf{x}, \mathbf{m}, \mathbf{s})$ como descrito na teoria anteriormente.

De acordo com a teoria exposta, precisa-se calcular o vetor score e a matriz hessiana.

O vetor score é o vetor $3 \ x \ 1$ das primeiras derivadas de $n \log \left(\frac{1}{\mathbf{s}} \right) + \sum_{i=1}^n \log \left(\left(1 + \mathbf{x} \frac{\mathbf{x}_i - \mathbf{m}}{\mathbf{s}} \right)^{-1/\mathbf{x}-1} \right) - \sum_{i=1}^n \left(1 + \mathbf{x} \frac{\mathbf{x}_i - \mathbf{m}}{\mathbf{s}} \right)^{-1/\mathbf{x}}$ em relação a $\mathbf{x} = (\mathbf{x}, \mathbf{m}, \mathbf{s})$, ou seja,

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \log L}{\partial \mathbf{x}} \\ \frac{\partial \log L}{\partial \mathbf{m}} \\ \frac{\partial \log L}{\partial \mathbf{s}} \end{bmatrix} \quad (42)$$

Abaixo encontram-se os três termos desenvolvidos que compõem o vetor score, onde:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \log L}{\partial \mathbf{x}} &= \sum_{i=1}^n \frac{\left(\mathbf{x}_i - \mathbf{m} \right) \left(-1 - \frac{1}{\mathbf{x}} \right)}{\left(1 + \frac{\left(\mathbf{x}_i - \mathbf{m} \right) \mathbf{x}}{\mathbf{s}} \right) \mathbf{s}} + \sum_{i=1}^n \frac{\log \left(1 + \frac{\left(\mathbf{x}_i - \mathbf{m} \right) \mathbf{x}}{\mathbf{s}} \right)}{\mathbf{x}^2} - \\ &\quad \sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{\left(\mathbf{x}_i - \mathbf{m} \right) \mathbf{x}}{\mathbf{s}} \right)^{\frac{1}{\mathbf{x}}} \left(-\frac{\left(\mathbf{x}_i - \mathbf{m} \right)}{\mathbf{x} \left(1 + \frac{\left(\mathbf{x}_i - \mathbf{m} \right) \mathbf{x}}{\mathbf{s}} \right) \mathbf{s}} + \frac{\log \left(1 + \frac{\left(\mathbf{x}_i - \mathbf{m} \right) \mathbf{x}}{\mathbf{s}} \right)}{\mathbf{x}^2} \right) \end{aligned} \quad (43)$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial \mathbf{m}} = - \frac{\sum_{i=1}^n \left(-1 - \frac{1}{\mathbf{x}} \right) \mathbf{x}}{\left(1 + \frac{(x_i - \mathbf{m}) \mathbf{x}}{\mathbf{s}} \right) \mathbf{s}} - \frac{\sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{(x_i - \mathbf{m}) \mathbf{x}}{\mathbf{s}} \right)^{-1 - \frac{1}{\mathbf{x}}}}{\mathbf{s}} \quad (44)$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial \mathbf{s}} = - \frac{\log n}{\mathbf{s}^2} - \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mathbf{m}) \left(-1 - \frac{1}{\mathbf{x}} \right) \mathbf{x}}{\left(1 + \frac{(x_i - \mathbf{m}) \mathbf{x}}{\mathbf{s}} \right) \mathbf{s}^2} - \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mathbf{m}) \left(1 + \frac{(x_i - \mathbf{m}) \mathbf{x}}{\mathbf{s}} \right)^{-1 - \frac{1}{\mathbf{x}}}}{\mathbf{s}^2} \quad (45)$$

A matriz hessiana é uma matriz simétrica 3×3 composta das segundas derivadas de $n \log \left(\frac{1}{\mathbf{s}} \right) + \sum_{i=1}^n \log \left(\left(1 + \mathbf{x} \frac{x_i - \mathbf{m}}{\mathbf{s}} \right)^{-1/\mathbf{x}-1} \right) - \sum_{i=1}^n \left(1 + \mathbf{x} \frac{x_i - \mathbf{m}}{\mathbf{s}} \right)^{-1/\mathbf{x}}$ em relação $\mathbf{?} = (\mathbf{x}, \mathbf{m}, \mathbf{s})$, ou seja:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \log L}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{x}} & \frac{\partial^2 \log L}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{m}} & \frac{\partial^2 \log L}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{s}} \\ \frac{\partial^2 \log L}{\partial \mathbf{m} \partial \mathbf{x}} & \frac{\partial^2 \log L}{\partial \mathbf{m} \partial \mathbf{m}} & \frac{\partial^2 \log L}{\partial \mathbf{m} \partial \mathbf{s}} \\ \frac{\partial^2 \log L}{\partial \mathbf{s} \partial \mathbf{x}} & \frac{\partial^2 \log L}{\partial \mathbf{s} \partial \mathbf{m}} & \frac{\partial^2 \log L}{\partial \mathbf{s} \partial \mathbf{s}} \end{bmatrix} \quad (46)$$

onde:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L^2}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{x}} = & \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \mathbf{m})^2 \left(-1 - \frac{1}{\mathbf{x}} \right)}{\left(1 + \frac{(x_i - \mathbf{m})\mathbf{x}}{\mathbf{s}} \right)^2 \mathbf{s}^2} + \sum_{i=1}^n \frac{2(x_i - \mathbf{m})}{\mathbf{x}^2 \left(1 + \frac{(x_i - \mathbf{m})\mathbf{x}}{\mathbf{s}} \right) \mathbf{s}} - \sum_{i=1}^n \frac{2 \log \left(1 + \frac{(x_i - \mathbf{m})\mathbf{x}}{\mathbf{s}} \right)}{\mathbf{x}^3} - \\
& \sum_{i=1}^n \log \left(1 + \frac{(x_i - \mathbf{m})\mathbf{x}}{\mathbf{s}} \right)^{-\frac{1}{\mathbf{x}}} \left(\frac{(x_i - \mathbf{m})^2}{\mathbf{x} \left(1 + \frac{(x_i - \mathbf{m})\mathbf{x}}{\mathbf{s}} \right)^2 \mathbf{s}^2} + \frac{2(x_i - \mathbf{m})}{\mathbf{x}^2 \left(1 + \frac{(x_i - \mathbf{m})\mathbf{x}}{\mathbf{s}} \right) \mathbf{s}} - \frac{2 \log \left(1 + \frac{(x_i - \mathbf{m})\mathbf{x}}{\mathbf{s}} \right)}{\mathbf{x}^3} \right) - \\
& \sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{(x_i - \mathbf{m})\mathbf{x}}{\mathbf{s}} \right)^{-\frac{1}{\mathbf{x}}} \left(-\frac{(x_i - \mathbf{m})}{\mathbf{x} \left(1 + \frac{(x_i - \mathbf{m})\mathbf{x}}{\mathbf{s}} \right) \mathbf{s}} + \frac{\log \left(1 + \frac{(x_i - \mathbf{m})\mathbf{x}}{\mathbf{s}} \right)}{\mathbf{x}^2} \right)^2
\end{aligned} \tag{47}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L^2}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{m}} = & \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \mathbf{m}) \left(-1 - \frac{1}{\mathbf{x}} \right) \mathbf{x}}{\left(1 + \frac{(x_i - \mathbf{m})\mathbf{x}}{\mathbf{s}} \right)^2 \mathbf{s}^2} + \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \mathbf{m}) \left(1 + \frac{(x_i - \mathbf{m})\mathbf{x}}{\mathbf{s}} \right)^{-2-\frac{1}{\mathbf{x}}}}{\mathbf{s}^2} - \sum_{i=1}^n \frac{\left(-1 - \frac{1}{\mathbf{x}} \right)}{\left(1 + \frac{(x_i - \mathbf{m})\mathbf{x}}{\mathbf{s}} \right) \mathbf{s}} \\
& - \sum_{i=1}^n \frac{1}{\mathbf{x} \left(1 + \frac{(x_i - \mathbf{m})\mathbf{x}}{\mathbf{s}} \right) \mathbf{s}} + \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\left(1 + \frac{(x_i - \mathbf{m})\mathbf{x}}{\mathbf{s}} \right)^{-1-\frac{1}{\mathbf{x}}} \left(-\frac{(x_i - \mathbf{m})}{\mathbf{x} \left(1 + \frac{(x_i - \mathbf{m})\mathbf{x}}{\mathbf{s}} \right) \mathbf{s}} + \frac{\log \left(1 + \frac{(x_i - \mathbf{m})\mathbf{x}}{\mathbf{s}} \right)}{\mathbf{x}^2} \right)}{\mathbf{s}} \right\}
\end{aligned} \tag{48}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L^2}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{s}} = & \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \mathbf{m})^2 \left(-1 - \frac{1}{\mathbf{x}} \right) \mathbf{x}}{\left(1 + \frac{(x_i - \mathbf{m})\mathbf{x}}{\mathbf{s}} \right)^2 \mathbf{s}^3} + \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \mathbf{m})^2 \left(1 + \frac{(x_i - \mathbf{m})\mathbf{x}}{\mathbf{s}} \right)^{-2-\frac{1}{\mathbf{x}}}}{\mathbf{s}^3} - \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \mathbf{m}) \left(-1 - \frac{1}{\mathbf{x}} \right)}{\left(1 + \frac{(x_i - \mathbf{m})\mathbf{x}}{\mathbf{s}} \right)^2} - \\
& \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \mathbf{m})}{\mathbf{x} \left(1 + \frac{(x_i - \mathbf{m})\mathbf{x}}{\mathbf{s}} \right)^2 \mathbf{s}^2} - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\left(x_i - \mathbf{m} \right) \left(1 + \frac{(x_i - \mathbf{m})\mathbf{x}}{\mathbf{s}} \right)^{-1-\frac{1}{\mathbf{x}}} \left(-\frac{(x_i - \mathbf{m})}{\mathbf{x} \left(1 + \frac{(x_i - \mathbf{m})\mathbf{x}}{\mathbf{s}} \right) \mathbf{s}} + \frac{\log \left(1 + \frac{(x_i - \mathbf{m})\mathbf{x}}{\mathbf{s}} \right)}{\mathbf{x}^2} \right)}{\mathbf{s}^2} \right) \\
& (49)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial L^2}{\partial \mathbf{m} \partial \mathbf{m}} = \sum_{i=1}^n - \frac{\left(-1 - \frac{1}{\mathbf{x}} \right) \mathbf{x}^2}{\left(1 + \frac{(x_i - \mathbf{m})\mathbf{x}}{\mathbf{s}} \right)^2 \mathbf{s}^2} + \sum_{i=1}^n \frac{\left(-1 - \frac{1}{\mathbf{x}} \right) \mathbf{x} \left(1 + \frac{(x_i - \mathbf{m})\mathbf{x}}{\mathbf{s}} \right)^{-2-\frac{1}{\mathbf{x}}}}{\mathbf{s}^2} \quad (50)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L^2}{\partial \mathbf{m} \partial \mathbf{s}} = & \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \mathbf{m}) \left(-1 - \frac{1}{\mathbf{x}} \right) \mathbf{x}^2}{\left(1 + \frac{(x_i - \mathbf{m})\mathbf{x}}{\mathbf{s}} \right)^3 \mathbf{s}^3} + \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \mathbf{m}) \left(-1 - \frac{1}{\mathbf{x}} \right) \mathbf{x} \left(1 + \frac{(x_i - \mathbf{m})\mathbf{x}}{\mathbf{s}} \right)^{-2-\frac{1}{\mathbf{x}}}}{\mathbf{s}^3} + \\
& \sum_{i=1}^n \frac{\left(-1 - \frac{1}{\mathbf{x}} \right) \mathbf{x}}{\left(1 + \frac{(x_i - \mathbf{m})\mathbf{x}}{\mathbf{s}} \right)^2 \mathbf{s}^2} + \sum_{i=1}^n \frac{\left(1 + \frac{(x_i - \mathbf{m})\mathbf{x}}{\mathbf{s}} \right)^{-1-\frac{1}{\mathbf{x}}}}{\mathbf{s}^2} \\
& (51)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L^2}{\partial \mathbf{s} \partial \mathbf{s}} = & \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \mathbf{m})^2 \left(-1 - \frac{1}{\mathbf{x}} \right) \mathbf{x}^2}{\left(1 + \frac{(x_i - \mathbf{m})\mathbf{x}}{\mathbf{s}} \right) \mathbf{s}^4} + \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \mathbf{m})^2 \left(-1 - \frac{1}{\mathbf{x}} \right) \mathbf{x} \left(1 + \frac{(x_i - \mathbf{m})\mathbf{x}}{\mathbf{s}} \right)^{-2 - \frac{1}{\mathbf{x}}}}{\mathbf{s}^4} \\
& + \frac{2 \log n}{\mathbf{s}^3} + \sum_{i=1}^n \frac{2(x_i - \mathbf{m}) \left(-1 - \frac{1}{\mathbf{x}} \right) \mathbf{x}}{\left(1 + \frac{(x_i - \mathbf{m})\mathbf{x}}{\mathbf{s}} \right) \mathbf{s}^3} + \sum_{i=1}^n \frac{2(x_i - \mathbf{m}) \left(1 + \frac{(x_i - \mathbf{m})\mathbf{x}}{\mathbf{s}} \right)^{-1 - \frac{1}{\mathbf{x}}}}{\mathbf{s}^3}
\end{aligned} \tag{52}$$

O processo numérico iterativo de Newton-Raphson, foi realizado no programa Matlab versão 6.5, através do pacote EVIM. O EVIM é o módulo de análise de valores extremos do Matlab. Os valores das estimativas encontradas são apresentados e analisados a seguir na seção 3.5 do capítulo 3.

CAPÍTULO 3 – AVALIAÇÃO DOS PARÂMETROS

3.1 Introdução

A primeira parte deste capítulo apresentará a amostra completa de dados.

Em seguida, será realizada uma análise exploratória dos dados da amostra utilizada. Durante a análise exploratória dos dados, será utilizada a estatística descritiva com o intuito de prover informações que auxiliem na caracterização da distribuição dos dados da amostra. Alguns testes e ferramentas estatísticos serão também utilizados nesta fase.

Em seguida, serão realizados testes e análises de ferramentas úteis na aprovação estatística da estimação dos parâmetros realizada no capítulo anterior.

Durante a confecção do capítulo, as ferramentas serão descritas simultaneamente a sua aplicação.

A construção das ferramentas estatísticas e a condução dos testes estatísticos foram realizadas através do pacote computacional Matlab versão 6.5, desenvolvido pela Math Works Inc.. Utilizou-se também o Microsoft Excel para a formatação dos dados e para a realização de cálculos de menor complexidade.

3.2 A Amostra Escolhida

3.2.1 Amostra Inicial

A amostra de dados escolhida foi a série temporal diária dos preços do futuro do índice BOVESPA. O período de tempo escolhido foi de janeiro de 1994 até julho de 2003, totalizando 2375 dados sucessivos que são considerados os dados-base.

O trabalho visou estudar a distribuição dos log-retornos do índice BOVESPA, logo construiu-se a série dos mesmos da seguinte forma:

$$R_t = \ln\left(\frac{Ibov_{t+1}}{Ibov_t}\right) \quad (53)$$

onde t é um índice de posição temporal, $Ibov_t$ é o t -ésimo valor do preço do índice BOVESPA e R_t é o valor do t -ésimo log-retorno calculado.

A série dos log-retornos diárias construída contém um total de 2374 dados. A série dos preços do IBOVESPA pode ser conseguida no “site” oficial da Bolsa de Valores de São Paulo.

3.2.2 Amostra de Mínimos e Máximos

Outras duas séries foram construídas para a realização do trabalho. As séries são chamadas de mínimos mensais e máximos mensais.

Para a seleção destas amostras foi utilizado um método de identificação de valores extremos de séries completas. O método é conhecido como bloco máximo (“block maxima”) e consiste simplesmente na separação dos máximos valores absolutos de cada bloco. O bloco é uma divisão da série completa, podendo ter 21 observações (mensal), 63 observações (trimestral), 126 observações (semestral) ou 252 observações (anual). No estudo, os máximos mensais são valores máximos de cada bloco mensal, totalizando 114 observações. Para os mínimos segue-se a mesma metodologia, totalizando 113 observações. As séries de mínimos e máximos foram cada uma dividida em duas, sendo uma série de dados base e outra série de teste. Os passos do método de divisão são enumerados abaixo:

1. ordenar temporalmente a série completa de máximos/mínimos;
2. gerar aleatoriamente com equiprobabilidade os números 0 e 1 para cada valor da série;
3. se for 0 aquele valor da série será constituinte da amostra base de máximos/mínimos;
4. se for 1 aquele valor da série será constituinte da amostra de teste de máximos/mínimos ;

As séries base de máximos e mínimos serão também chamadas apenas de mínimos e máximos mensais e serão as séries que serão utilizadas na estimação dos parâmetros da distribuição que seguem.

Já as séries teste de mínimos (50 dados) e máximos (58 dados) serão utilizadas apenas no capítulo 5 para comparar de informações geradas no capítulo 4 através das séries base.

Entretanto, para a análise exploratória serão utilizadas as séries de máximos e mínimos completas, ou seja, compostas das séries base e das séries teste.

As séries utilizadas no estudo podem ser visualizadas no Apêndice A.

3.3 Análise Exploratória dos Dados

Antes de analisar as estimativas dos parâmetros conseguidos, será realizada uma análise exploratória dos dados em estudo.

3.3.1 Estatísticas Descritivas

A tabela 3.1 mostra algumas estatísticas para os log-retornos diários do índice BOVESPA. Estas estatísticas sugerem uma distribuição incondicional com caudas densas e ligeiramente assimétricas, indicando afastamento da distribuição normal.

Mínimo	1% Quantil	25% Quantil	Mediana	75% Quantil	99% Quantil	Máximo
-17.226	-7.505	-1.263	0.145	1.588	8.046	28.825

Tabela 3.1- Estatísticas descritivas dos log-retornos diários do índice Bovespa (%)

Elaborado pelo autor

A assimetria da amostra dos log-retornos diários do índice BOVESPA é 0.58 e a curtose é 12.40, o que caracteriza uma distribuição assimétrica para direita e leptocúrtica. Estas características podem ser confirmadas na figura 3.1. Nota-se que há ocorrência de valores extremos tanto na cauda esquerda quanto na cauda direita. Entretanto, a cauda direita mostra-se visualmente mais densa, o que vem ao encontro das estatísticas descritivas expostas.

Quanto mais alongada verticalmente for a distribuição de densidade de probabilidade maior a sua curtose. Medidas de curtose acima de 3 indicam uma distribuição leptocúrtica e valores abaixo de 3 indicam uma distribuição mesocúrtica. Já em relação a medida de assimetria, se seu valor for maior que zero a assimetria da distribuição é direita, caso contrário é classificada como assimetria esquerda. O cálculo da assimetria (A) e da curtose (K) será mostrado logo a seguir na subseção 3.3.4.

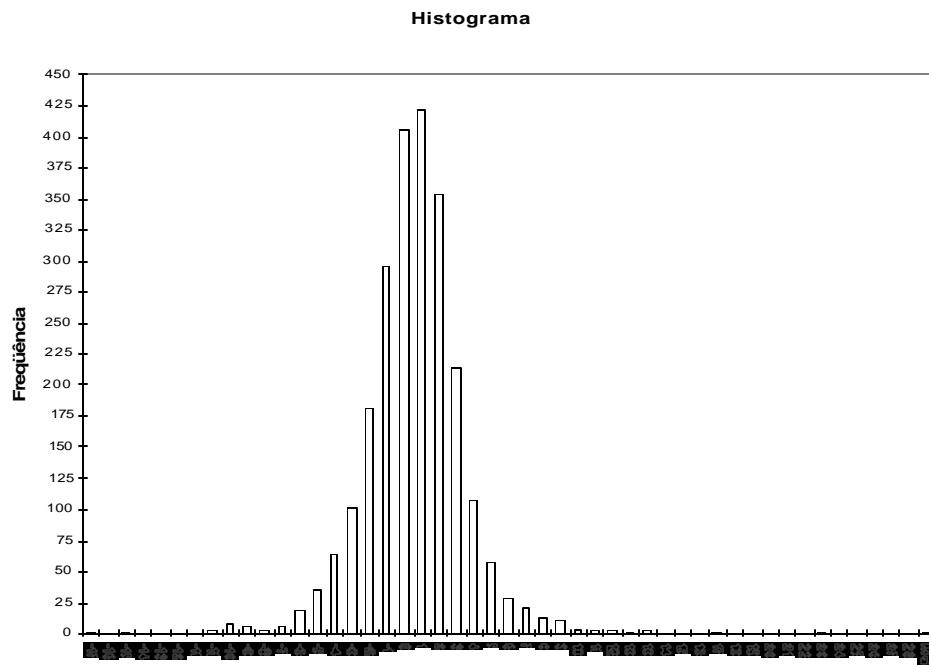


Figura 3.1-Histograma da série de log-retornos do índice BOVESPA

Elaborado pelo autor

A figura 3.2 mostra a série de log-retornos do índice BOVESPA temporalmente ordenada. Pode-se constatar algumas características como por exemplo a existência de agrupamentos de volatilidade, isto é, retornos grandes (em valor absoluto), são mais provavelmente seguidos de retornos grandes (em valor absoluto) e retornos pequenos (em valor absoluto) são mais provavelmente seguidos de retornos pequenos (em valor absoluto). Isto caracteriza períodos de alta/baixa volatilidade. Em termos estatísticos, isto significa que o modelo é heterocedástico.

Outra observação é o retorno a média da série, indicando, em média, a natureza estacionária da série de log-retornos. Observam-se também valores

extremos na série indicando a existência de caudas densas na distribuição incondicional dos log-retornos.

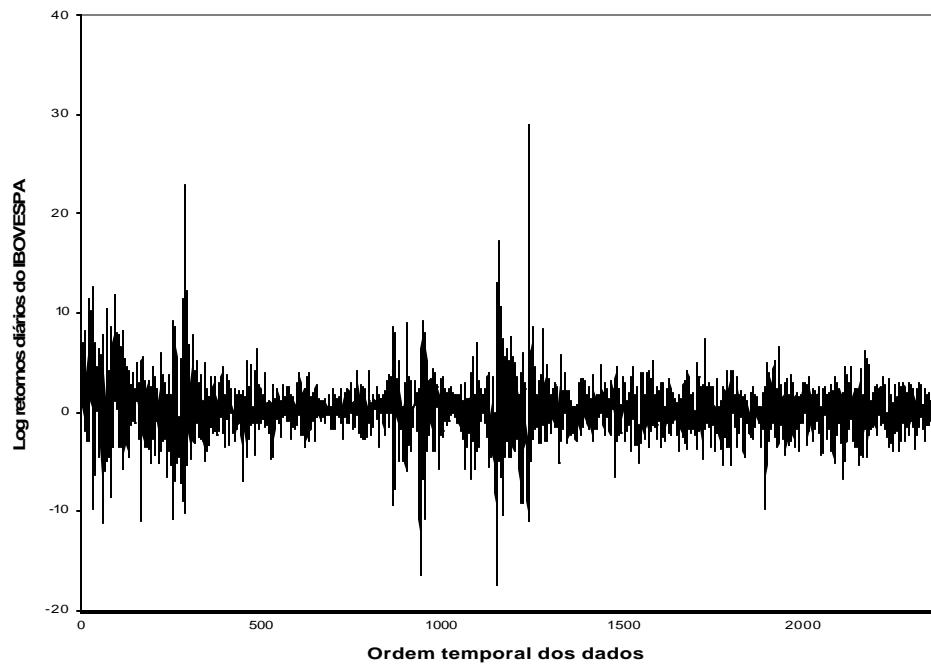


Figura 3.2 –Log-retornos diários (%) do índice BOVESPA.

Elaborado pelo autor

As figuras 3.3 e 3.4 mostram os log-retornos mínimos e máximos do IBOVESPA selecionados mensalmente. A seleção ocorreu através do método de bloco máximo definido na subseção 3.2.2.

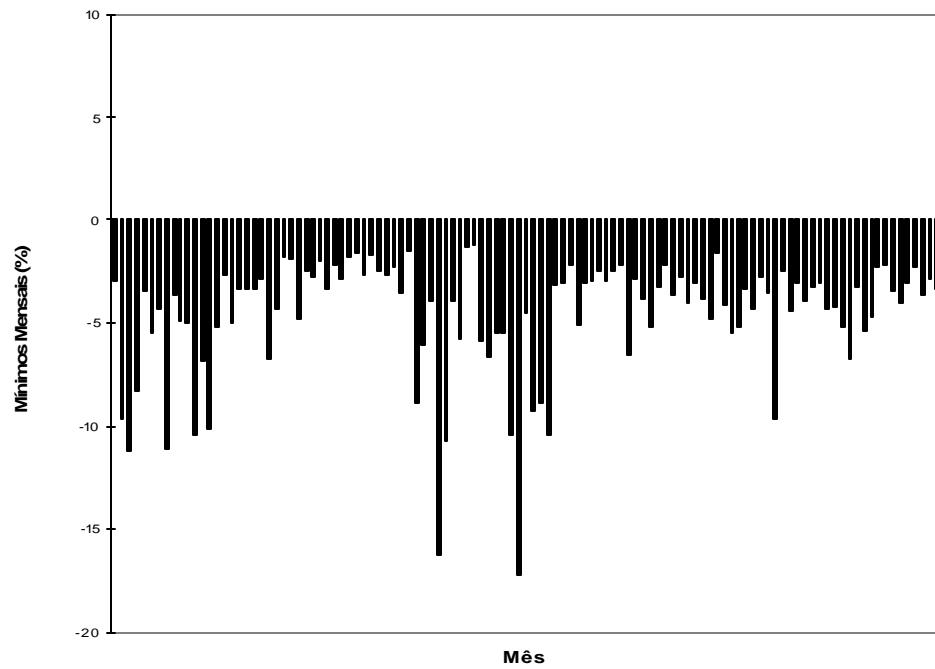


Figura 3.3 -Mínimos mensais (%) do índice BOVESPA

Elaborado pelo autor

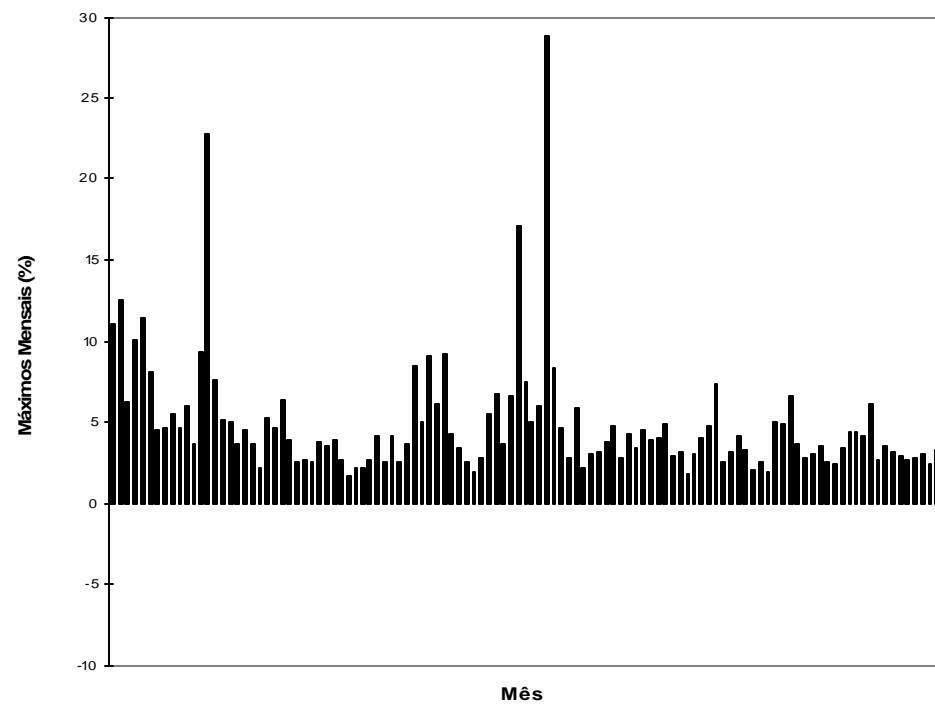


Figura 3.4 -Máximos mensais (%) do índice BOVESPA

Elaborado pelo autor

A tabela 3.2 mostra algumas estatísticas para os máximos e mínimos mensais dos log-retornos diários do índice BOVESPA. As estatísticas sugerem uma distribuição assimétrica para a esquerda para os mínimos, e assimétrica para a direita para os máximos. O valor de assimetria calculado para a série dos mínimos é igual a -1.90 e para a série dos máximos é igual a 3.68.

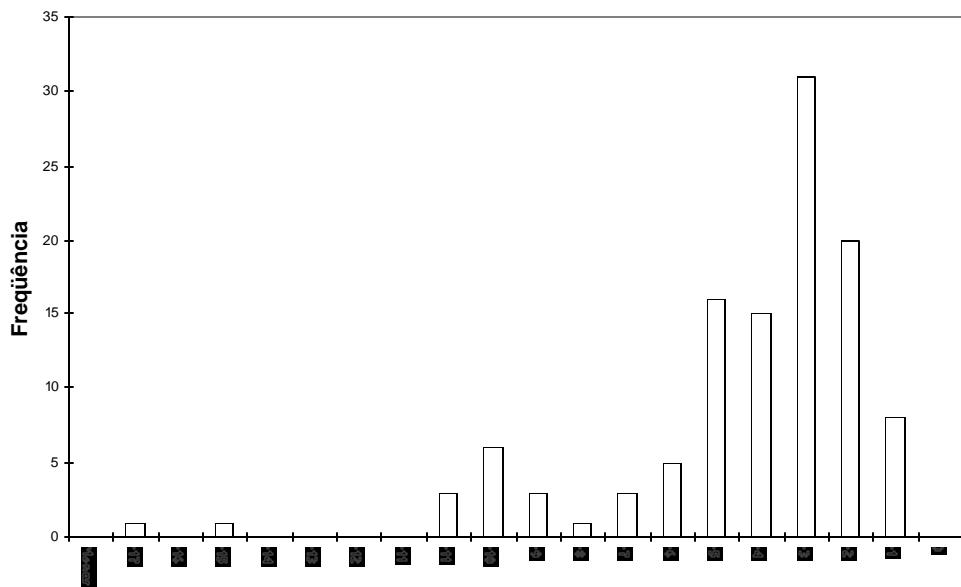
Estas informações podem ser observadas nas figuras 3.5 e 3.6 que mostram os histogramas para os valores máximos mensais e para os valores dos mínimos mensais, onde também pode se checar a leptocurtose das duas séries. A série de mínimos apresenta valor de curtose igual a 7.22 e a série de máximos apresenta valor de curtose igual a 20.51.

	Mínimo	1º Quartil	Mediana	3º Quartil	Máximo
Mínimos					
Mensais	-17.226	-5.247	-3.637	-2.770	-1.264
Máximos					
Mensais	1.699	2.883	3.923	5.289	28.825

Tabela 3.2 – Estatísticas descritivas dos mínimos e máximos mensais dos retornos
diários do índice BOVESPA (%)

Elaborado pelo autor

Histograma - Mínimos Mensais



Continuando a análise exploratória dos dados foi utilizada uma outra ferramenta gráfica bastante útil, denominada função média dos excessos, para a avaliação da densidade das caudas de distribuições.

3.3.2 Função Média e Função Mediana dos Excessos

A função da média dos excessos de uma variável aleatória X , denotada $e(u)$, é definida da seguinte forma:

$$e(u) = E[X - u | X > u], \quad 0 \leq u \leq c_F. \quad (54)$$

Para variáveis aleatórias cuja distribuição tem caudas pesadas, a função da média dos excessos, para valores grandes do argumento, geralmente varia de uma função constante (para a distribuição exponencial) a uma reta com inclinação positiva (para a distribuição Pareto). No contexto de finanças $e(u)$ é denominado *shortfall*.

A análise gráfica que vai ser feita é baseada na estimativa da função da média dos excessos apresentada a seguir:

$$\hat{e}_i(u) = \frac{\sum_i (X_i - u)}{\sum_i Y_i} \quad (55)$$

onde $(X_i - u) > 0$, $Y_i = 1$ e $i = (1, 2, \dots, n)$.

Ao se construir o gráfico do valor de corte u versus a função da média dos excessos empírica obtém-se o gráfico da média dos excessos (ME-plot-“Mean Excess plot”) cujas características auxiliam na análise explanatória dos dados. Isto é, se a função média dos excessos empírica for paralela ao eixo das abscissas temos indicação de uma distribuição de Gumbel. No caso da função da média dos excessos apresentar comportamento linear se tem evidências de uma distribuição Fréchet (Embrechts *et al.*(1997)). Vale lembrar que no caso de se ter poucos dados disponíveis, os gráficos ficam bastante sensíveis a mudanças nos dados, para valores

grandes de u . Neste caso, uma alternativa como a função da mediana dos excessos, apresentada a seguir é aconselhável (Rootzén and Tajivid(1997)).

$$\hat{e}(u) = \{X_i/F(X_i - u) = 0.5[1 - F(u)]\} \quad (56)$$

onde $u \geq 0$, $(X_i - u) > 0$, $i = (1, 2, \dots, n)$ e $F(\cdot)$ é função distribuição de probabilidade acumulada.

As figuras 3.7 e 3.8 mostram a função da média dos excessos para as caudas esquerda e direita, respectivamente. É interessante notar que as caudas esquerda e direita apresentam comportamentos distintos. A função média dos excessos para a cauda esquerda não apresenta comportamento bem definido, não sugerindo distribuição alguma. Entretanto, a função da média dos excessos para a cauda direita apresenta comportamento linear ascendente sugerindo fortemente uma distribuição com cauda densa para os máximos.

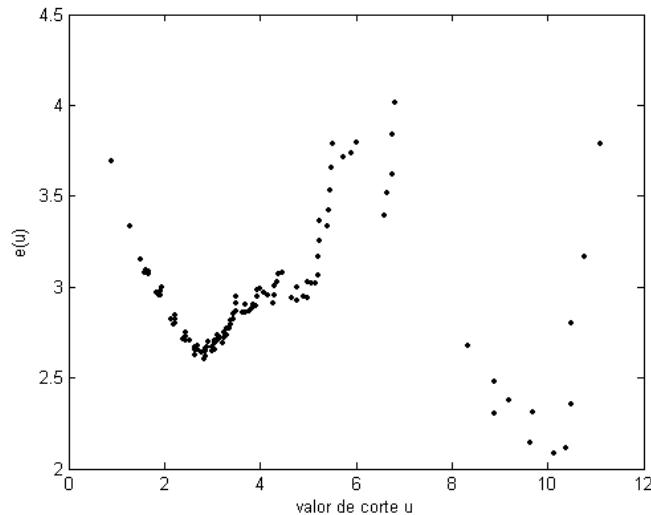


Figura 3.7 – Função da média dos excessos empírica para a cauda esquerda da distribuição dos log-retornos diários do índice BOVESPA.

Elaborado pelo autor

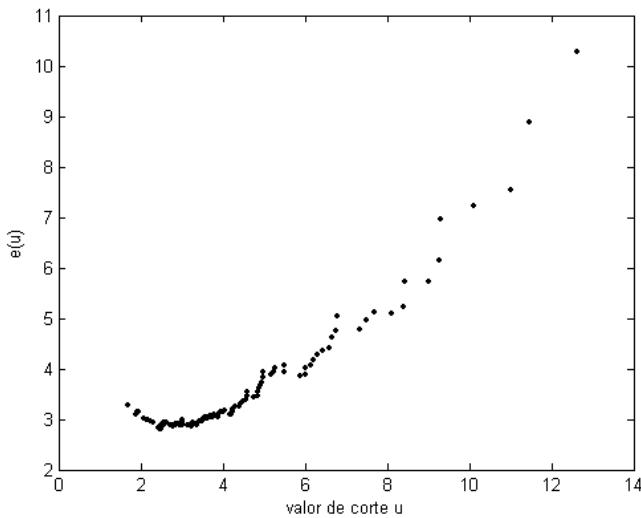


Figura 3.8 – Função da média dos excessos empírica para a cauda direita da distribuição dos log-retornos diários do índice BOVESPA
Elaborado pelo autor

As estatísticas descritivas e as informações gráficas até aqui analisadas sugerem que tanto a série completa de dados-base, ou seja, a série dos log-retornos diários do índice BOVESPA, quanto as séries de mínimos e máximos mensais não seguem uma distribuição normal. Para se confirmar esta última afirmação, o teste de Jarque-Bera foi utilizado.

3.3.3 O Teste de Jarque-Bera

O teste de Jarque-Bera verifica a hipótese de uma amostra apresentar distribuição normal com média e variância não especificadas contra a hipótese da amostra não seguir uma distribuição normal. O teste é baseado na assimetria e na curtose da amostra. Para uma distribuição normal, a assimetria é igual a zero e a curtose é igual a 3. O teste de Jarque-Bera testa a hipótese de a assimetria e a curtose da amostra serem significativamente diferentes de seus valores esperados. Este é um teste assintótico e não deve ser usado para amostras pequenas. Em caso de amostras pequenas deve-se utilizar o teste de Lillie (Conover(1980)).

A estatística de teste é:

$$JB = N \left[\frac{A^2}{6} + \frac{(C-3)^2}{24} \right] \quad (57)$$

onde $A = \frac{B^2}{(S^2)^3}$, com $B = \frac{\sum_i (X_i - \bar{X})^3}{n}$, $S^2 = \frac{\sum_i (X_i - \bar{X})^2}{n}$ e $C = \frac{K^2}{(S^2)^2}$, com

$$K = \frac{(X_i - \bar{X})^4}{n}.$$

A estatística JB deve ser comparada com os valores críticos e uma distribuição qui-quadrado com 2 graus de liberdade.

O teste de Jarque-Bera aplicado a série completa em estudo rejeita a hipótese nula de normalidade ao nível de significância de 0,5%, já que o valor da estatística de teste é 8873,40 e o valor crítico de comparação é 10,60. O p-valor é desprezível dado o alto valor da estatística de teste. Para as séries de mínimos e máximos a rejeição também ocorre como mostrado na tabela 3.3 abaixo.

Série	Estatística JB	Qui-quadrado para $\alpha = 0.5\%$	p-valor
Dados-Base	8873,40	10,60	$\langle < 0,1\% \rangle$
Mínimos Mensais	146,25	10,60	$\langle < 0,1\% \rangle$
Máximos Mensais	1648	10,60	$\langle < 0,1\% \rangle$

Tabela 3.3 – Estatísticas de Jarque-Bera e p-valor para as séries completa, mínimos mensais e máximos mensais.

Elaborado pelo autor

O p-valor de uma estatística de teste é o menor nível de significância para o qual a hipótese nula seria rejeitada para um determinado conjunto de dados.

Concluída a análise exploratória dos dados, passa-se a análise das estimativas dos parâmetros da distribuição de probabilidade dos máximos e mínimos.

3.4 Análise das Estimativas Encontradas

3.4.1 Apresentação das Estimativas

Para os mínimos e máximos valores extremos mensais, pertencentes respectivamente às caudas esquerda da distribuição dos log-retornos do índice BOVESPA, tem-se:

	– log L	Parâmetro	Estimativa	Erro	Estatística	p-valor
				Padrão	z	
Mínimos	247,0067	x	0,2631	0,0779	3,3774	$\langle < 0,1\% \rangle$
		m	-3,1629	0,1636	19,3331	$\langle < 0,1\% \rangle$
		s	1,1549	0,1348	8,5675	$\langle < 0,1\% \rangle$
Máximos	240,6686	x	0,4027	0,0900	4,4744	$\langle < 0,1\% \rangle$
		m	3,3334	0,1455	22,9100	$\langle < 0,1\% \rangle$
		s	1,3535	0,1308	10,3479	$\langle < 0,1\% \rangle$

Tabela 3.4 - Estimativas dos Parâmetros da Distribuição GEV para os mínimos e máximos mensais do índice BOVESPA

Elaborado pelo autor

Pode-se observar que a função log-verossimilhança atinge valor maior para os máximos mensais do índice BOVESPA, indicando que a distribuição densidade de probabilidade estimada se aproxima melhor da distribuição densidade de probabilidade empírica dos dados da amostra de máximos.

Outro ponto interessante é o baixo valor relativo dos erros-padrão das estimativas dos parâmetros, demonstrados pelos elevados valores das estatísticas z. A um nível de significância menor que 0,1% rejeita-se a hipótese nula dos parâmetros serem iguais a zero.

A forte constatação estatística de os parâmetros serem diferentes de zero sugerem que tanto os dados da amostra de máximos quanto de mínimos seguem uma distribuição GEV, mais precisamente uma distribuição Fréchet.

A hipótese nula de que os valores mínimos mensais e os valores máximos mensais seguem uma distribuição de probabilidade GEV pode ser testada através de testes de aderência estatísticos. No estudo em questão, para testar a adequação do modelo utilizam-se os testes de Kolmogorov-Smirnov e Kuiper.

3.4.2 Os Testes de Kolmogorov-Smirnov e Kuiper

Os testes de Kolmogorov-Smirnov e Kuiper são testes formais de qualidade de ajuste utilizados para testar se a hipótese da GEV é de fato adequada. As estatísticas testes usadas para testar a hipótese nula de que os dados provém de uma distribuição GEV são as estatísticas de Kolmogorov-Smirnov D^+ , D^- e D , e a estatística de Kuiper V (Chandra *et al.*(1981)). definidas como:

$$D^+ = \operatorname{Max}_i \left\{ \frac{i}{N} - F_Y(y_{(i)}) \right\}, \quad (58)$$

$$D^- = \operatorname{Max}_i \left\{ F_Y(y_{(i)}) - \frac{i-1}{N} \right\}, \quad (59)$$

$$D = \operatorname{Max}(D^+, D^-), \quad (60)$$

$$V = D^+ + D^- \quad (61)$$

onde $y_{(i)}$ são as estatísticas de ordem, e $F_Y(\cdot)$ é a distribuição GEV obtida usando os parâmetros estimados por máxima verossimilhança.

Alguns valores críticos correspondentes aos níveis de significância de 1% e 5% para estas estatísticas são dados na tabela 3.5 para amostras de tamanho 50, e para amostras “muito grandes” (denotado “ $N = \infty$ ”). Por exemplo, ao se utilizar a tabela 3.5 no caso de uma amostra de tamanho 50, a hipótese nula de que os dados seguem uma distribuição GEV é rejeitada a um nível de significância de 5% (em favor da hipóteses que os dados não seguem uma distribuição GEV) se todas as

quatro estatísticas, \sqrt{ND}^+ , \sqrt{ND}^- , \sqrt{ND} , \sqrt{NV} ultrapassarem os valores críticos correspondentes de 0,796, 0,796, 0,856 e 1,428.

Nível de Significância	\sqrt{ND}^+	\sqrt{ND}^-	\sqrt{ND}	\sqrt{NV}
$N = 50$				
1%	0.940	0.944	0.988	1.639
5%	0.796	0.796	0.856	1.428
$N = \infty$				
1%	0.957	0.957	1.007	1.672
5%	0.808	0.808	0.874	1.477

Tabela 3.5 – Valores Críticos das Estatísticas de Teste de Kolmogorov-Smirnov e Kuiper Correspondentes aos Níveis de Significância de 1% e 5%

Elaborado pelo autor

A tabela 3.6 mostra as estatísticas de teste de Kolmogorov-Smirnov e Kuiper para os log-retornos mínimos e máximos do índice BOVESPA. A hipótese nula que os dados seguem uma distribuição GEV não pode ser rejeitada. Por exemplo, se considerarmos os máximos mensais, as estatísticas de Kolmogorov-Smirnov e Kuiper são: $\sqrt{ND}^+ = 0.309$, $\sqrt{ND}^- = 0.327$, $\sqrt{ND} = 0.327$, $\sqrt{NV} = 0.636$. Devido ao fato de serem todas menores que os valores críticos correspondentes apresentados na tabela 3.5, a hipótese nula de que os dados seguem uma distribuição GEV não é rejeitada a um nível de significância de 1%. Já para os mínimos, pode-se notar que ao nível de significância de 1% a estatística de Kuiper é maior que o valor crítico apresentado na tabela 3.5, entretanto como as três estatísticas de Kolmogorov-Smirnov são menores que os seus correspondentes valores críticos a afirmação acima que a hipótese nula é verdadeira não pode ser contrariada ao nível de 1% de significância.

	$\sqrt{ND^+}$	$\sqrt{ND^-}$	\sqrt{ND}	\sqrt{NV}
Mínimos	0.789	0.889	0.889	1.679
Mensais				
Máximos	0.309	0.327	0.327	0.636
Mensais				

Tabela 3.6 – Estatísticas de Bondade de Ajuste para os mínimos e máximos mensais do índice BOVESPA

Elaborado pelo autor

Tendo-se fortes evidências estatísticas de que tanto os mínimos quanto os máximos seguem uma distribuição GEV, é necessário confirmar estatisticamente qual das três distribuições GEV os máximos e mínimos seguem.

Os parâmetros de forma x são positivos tanto para a distribuição GEV dos valores mínimos mensais quanto para a distribuição GEV dos valores máximos mensais, sugerindo que a distribuição Frechét é adequada para os mesmos. O parâmetro de forma da distribuição GEV dos máximos mensais é relativamente maior que o parâmetro de forma da distribuição GEV dos mínimos mensais, indicando, novamente, que a cauda direita da distribuição de probabilidades dos valores de log-retorno do índice BOVESPA é mais densa.

Entretanto, para se ter maiores evidências estatísticas foi necessário a aplicação do teste de Razão de Verossimilhança.

3.4.3 O Teste de Razão de Verossimilhança

O teste da Razão de Verossimilhança compara a verossimilhança do modelo com restrição ($x = 0$) com a do modelo sem restrição ($x \in \mathcal{R}$). Ou seja, o teste rejeita a hipótese nula de que a distribuição é Gumbel ($x = 0$), se o valor da função log-verossimilhança sob H_0 , for muito diferente do valor da log-verossimilhança obtido sob a hipótese alternativa, supondo uma distribuição GEV ($x \in \mathcal{R}$).

A estatística de teste denominada razão de verossimilhança, é definida como

$$T_{RV} = 2 \left[L(\hat{\mathbf{m}}, \hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{x}}, y) - L(\hat{\mathbf{m}}_0, \hat{\mathbf{s}}_0, \hat{\mathbf{x}}_0, y) \right], \quad (62)$$

onde $L(\hat{\mathbf{m}}, \hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{x}}, y)$ é o valor da log-verossimilhança obtida supondo a distribuição Fréchet/Weibull e $L(\hat{\mathbf{m}}_0, \hat{\mathbf{s}}_0, \hat{\mathbf{x}}_0, y)$ é o valor da log-verossimilhança obtida supondo distribuição Gumbel.

A estatística T_{RV} deve ser comparada com os valores críticos de uma distribuição qui-quadrado com 1 grau de liberdade. Neste caso, valores de T_{RV} significativamente positivos implicam na distribuição Weibull, valores de T_{RV} significativamente negativos implicam na rejeição da hipótese nula em favor da distribuição Fréchet.

A tabela 3.7 apresenta os resultados do teste.

	\mathbf{x}	\mathbf{m}	\mathbf{s}	Log Verossimilhança	T_{RV} (p-valor)
Distribuição Gumbel para os mínimos mensais	0	-3.2821	1.2520	-247.0067	23.7626 $\langle < 1\% \rangle$
Distribuição Fréchet para os mínimos mensais	0.2631	-3.1629	1.1546	-235.1254	
Distribuição Gumbel para os máximos mensais	0	3.5043	1.4789	-240.6689	27.2272 $\langle < 1\% \rangle$
Distribuição Fréchet para os máximos mensais	0.4027	3.3334	1.3535	-227.0553	

Tabela 3.7 – Teste da Razão de Verossimilhança para o índice BOVESPA

Elaborado pelo autor

O teste de razão de verossimilhança sugere que tanto os máximos mensais do índice BOVESPA quanto os mínimos mensais seguem uma distribuição Fréchet.

Outra ferramenta que reforça a sugestão do teste de razão de verossimilhança é o QQ-plot apresentado a seguir.

3.4.4 QQ-plot

Em estatística, o QQ-plot é uma conveniente ferramenta visual para examinar se uma amostra segue uma determinada distribuição. Especificamente, os quantis de uma distribuição empírica são confrontados graficamente com os quantis de uma distribuição hipotética em estudo. Se a amostra em estudo segue a distribuição hipotética ou uma transformação linear da distribuição hipotética, o QQ-plot é linear, ou seja, o gráfico de dispersão dos quantis da distribuição hipotética contra os quantis da distribuição empírica tem formação retilínea.

Ao se tratar de valores extremos, os quantis da distribuição empírica são confrontados graficamente com os quantis de uma distribuição com caudas medianamente densas como, por exemplo, a distribuição exponencial. Se os dados da amostra seguem uma distribuição exponencial, o QQ-plot apresenta-se como uma reta. Se o QQ-plot apresenta uma concavidade a distribuição hipotética tem cauda mais pesada que a distribuição exponencial. Já se o QQ-plot apresenta uma convexidade, a distribuição hipotética tem caudas menos pesadas que a distribuição base exponencial.

Os QQ-plot apresentam-se abaixo nas figuras 3.9 e 3.10.

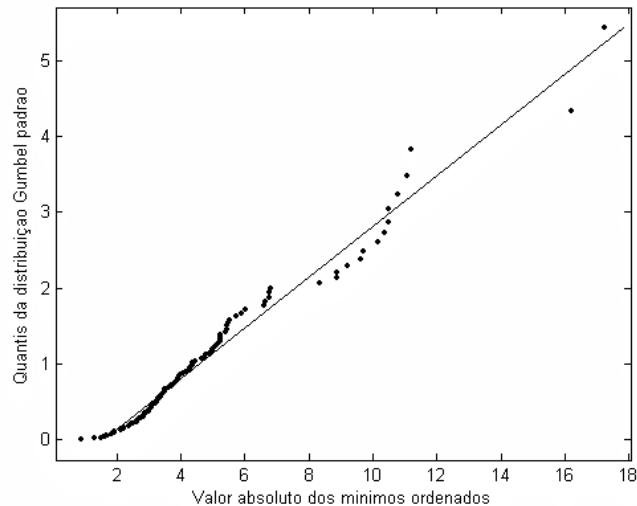


Figura 3.9 -QQ-plot para os mínimos mensais usando a distribuição gumbel padrão

como referência

Elaborado pelo autor

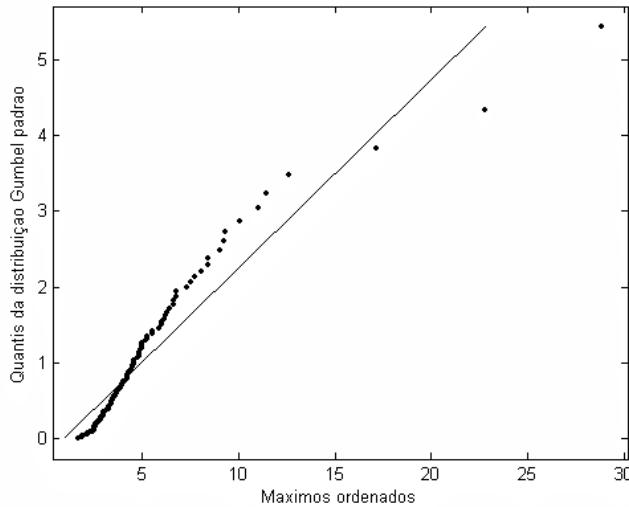


Figura 3.10 -QQ-plot para os máximos mensais usando a distribuição gumbel padrão como referência
Elaborado pelo autor

Pode-se observar uma sutil convexidade no QQ-plot para os mínimos mensais usando como referência a distribuição Gumbel. Já para o QQ-plot para os máximos mensais usando como referência a distribuição Gumbel observa-se a configuração de uma forte tendência de convexidade. A distribuição Gumbel é uma distribuição de caudas médias e, de acordo com o exposto na teria anteriormente, a formação de convexidade no QQ-plot tem o significado de que a distribuição empírica tem caudas mais pesadas do que a distribuição referência, no caso, a distribuição com caudas mais pesadas é distribuição Fréchet.

Nas figuras 3.11 e 3.12 os QQ-plots, tanto para os mínimos quanto para os máximos, usam como referência a distribuição Fréchet padrão com os parâmetros estimados por máxima verossimilhança. A figura 3.11, para os mínimos mensais, apresenta uma ligeira menor convexidade comparada com o QQ-plot exposto na figura anterior 3.9. Já a figura 3.11, para os máximos mensais, apresenta um QQ-plot com uma configuração linear muito bem definida.

Logo, a ausência ou diminuição do efeito de convexidade ao usar como referência uma distribuição hipotética com cauda mais densa indica que as distribuições empíricas têm caudas mais densas, ou seja, seguem uma distribuição Fréchet.

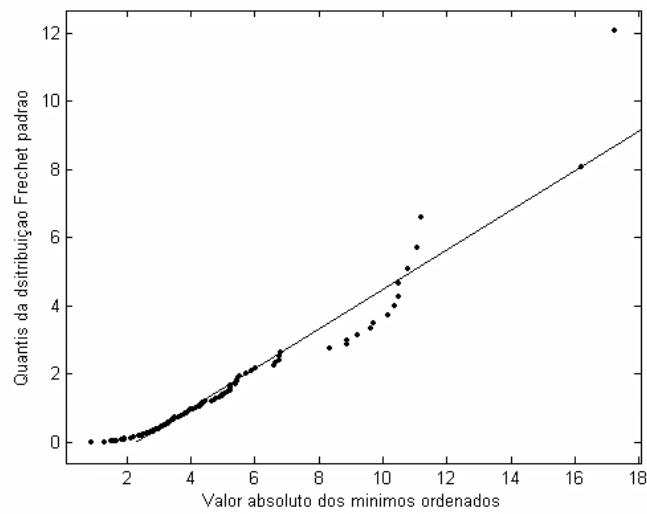


Figura 3.11 -QQ-plot para os mínimos mensais usando a distribuição fréchet padrão como referência
Elaborado pelo autor

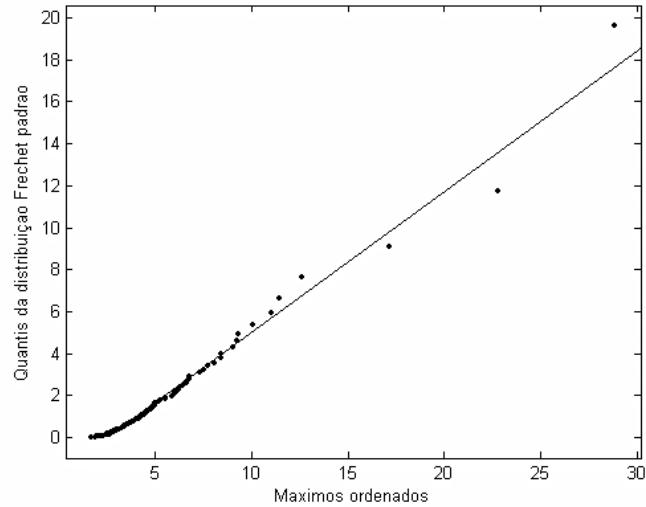


Figura 3.12 -QQ-plot para os máximos mensais usando a distribuição fréchet padrão como referência
Elaborado pelo autor

3.4.5 Densidade de Probabilidade Esperada x Densidade de Probabilidade Observada e Análises Conclusivas

As figuras 3.13 e 3.14 mostram os histogramas dos log-retornos dos mínimos e máximos mensais superpostos pela curva de densidade de probabilidade calculada utilizando os parâmetros estimados por máxima verossimilhança. Observa-se o ajuste entre os histogramas e as curvas, mostrando que os parâmetros estimados condizem com a distribuição dos dados empírica.

De posse de todas as evidências apresentadas, fica claro concluir que os valores dos mínimos log-retornos e dos máximos log-retornos do índice BOVESPA seguem uma distribuição GEV, mais especificamente uma distribuição Fréchet. Obviamente, como já observado, a série de máximos mensais apresenta uma distribuição de probabilidades com cauda direita mais pesada em comparação com a cauda direita da distribuição de probabilidades da série de mínimos absolutos, indicando que é mais provável a ocorrência de ganhos extremos do que perdas extremas para o investidor que aplica no índice BOVESPA. Entretanto, esta única afirmação não traz argumentos suficientes para se analisar os riscos de tal investimento. Logo, no capítulo seguinte é apresentado uma análise aprofundada sobre risco, aplicada particularmente ao caso em estudo, mas que pode ser utilizada para qualquer ativo financeiro, principalmente para ativos de renda variável como é o caso do índice BOVESPA.

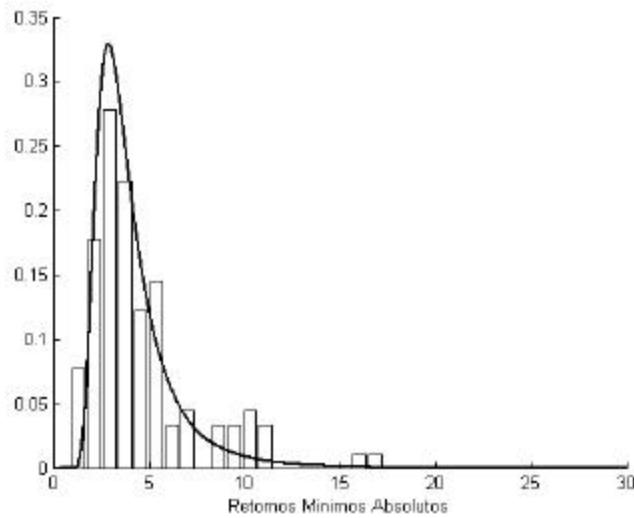


Figura 3.13 –Histograma e função densidade de probabilidade para os mínimos mensais do índice BOVESPA
Elaborado pelo autor

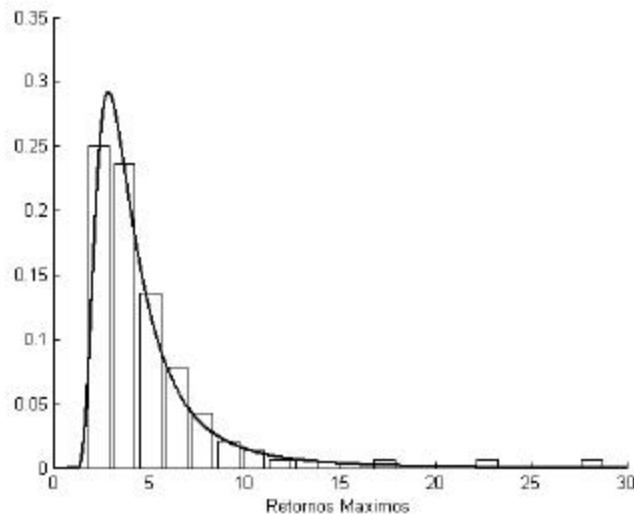


Figura 3.14 –Histograma e função densidade de probabilidade para os máximos mensais do índice BOVESPA
Elaborado pelo autor

CAPÍTULO 4 –APLICAÇÕES DO MODELO DA GEV NO GERENCIAMENTO DE RISCO

4.1 Introdução

Uma vez determinada a distribuição de valores extremos que melhor se ajusta a mínimos e máximos, é interessante analisar algumas ferramentas bastante úteis no gerenciamento de risco. As ferramentas são analisadas quando se respondem perguntas, tais como:

- Qual o tempo médio de espera para que se observe um retorno diário maior/menor que um dado valor de corte? Ou seja, para um valor de corte fixo (por exemplo, um nível de -10%), qual o tempo esperado antes que o índice BOVESPA apresente um retorno diário abaixo deste valor de corte? Ou ainda, para um valor de corte fixado (por exemplo, um nível de $+15\%$), qual o tempo esperado antes que o índice BOVESPA apresente um retorno diário acima deste valor de corte?
- Para um período fixado de tempo, qual a probabilidade de se observar pelo menos um retorno diário acima/abaixo de um valor de corte? Ou seja, para um período fixado de tempo (por exemplo, 6 meses), qual a probabilidade do índice BOVESPA apresente uma perda diária maior que um dado valor de corte (por exemplo, 5%)? Ou ainda, para um período de tempo fixado (por exemplo, 3 meses), qual a probabilidade de que o índice BOVESPA apresente um ganho diário maior que um dado valor de corte (por exemplo, $+10\%$)?
- Outra ferramenta importante é o evento de t -meses. O evento de t -meses é um evento extremo que se espera observar em média uma vez a cada t meses. Ou seja, é o nível de retorno diário que, em média, só deve ser ultrapassado em um único mês a cada t meses.

Tais perguntas serão respondidas neste capítulo através de informações gráficas e de tabelas a seguir expostas.

4.2 Cálculo do Período do Retorno u

Para iniciar as respostas a estas perguntas e propiciar uma análise objetiva do trabalho, é necessário considerar algumas suposições.

Primeiramente, é necessário considerar a seqüência independente e identicamente distribuída (i.i.d) de máximos (ou valor absoluto dos mínimos) com função de distribuição acumulada comum G_x , definida anteriormente.

Seja $u > 0$ um valor de corte e considere a seqüência de variáveis i.i.d.'s Bernoulli $I_{\{X_i > u\}}$ com probabilidade de sucesso dada por $\Pr\{X_i > u\} = \overline{G}_x(u) = 1 - G_x(u)$. Uma quantidade de interesse para gerentes de risco, e que responde o primeiro grupo de perguntas, é o tempo de ocorrência do primeiro sucesso. Por exemplo, a primeira vez que um retorno diário do índice BOVESPA seja maior que um certo nível u . Para determinar esta quantidade é preciso considerar a variável aleatória $L(u) = \min\{i \geq 1 / X_i > u\}$, onde $i = 1, 2, \dots, n$. $L(u)$ é uma variável aleatória que segue uma distribuição Geométrica com $\Pr\{L(u) = j\} = [G_x(u)]^{j-1}[1 - G_x(u)]$, $j = 1, 2, \dots$. Portanto, $L(u)$ representa quanto tempo (no caso, meses) deve-se esperar até que o índice BOVESPA apresente um ganho diário maior que u . O número esperado de meses para que um índice exceda um valor de corte u é $E[L(u)] = \frac{1}{1 - G_x(u)}$. A quantidade $E[L(u)]$ é também chamada período de retorno para os eventos $\{X_i > u\}$.

A tabela 4.1 e a figura 4.1 mostram a relação entre os períodos estimados de retorno e o valor de corte u para os mínimos e máximos mensais do índice BOVESPA.

u	Tempo estimado (meses) para que ocorra um retorno diário acima/abaixo de um valor de corte (u)	
	máximos	Mínimos
0	1,0	1,0
1	1,0	1,0
2	1,0	1,0
3	1,4	1,5
4	2,1	2,5
5	3,2	4,3
6	4,8	7,2
7	6,8	11,4
8	9,2	17,3
9	12,1	25,4
10	15,6	36,0
11	19,6	44,6
12	24,2	66,7

Tabela 4.1 – Tempo estimado para que ocorra um retorno diário acima de um valor de corte para os máximos/mínimos absolutos mensais do índice BOVESPA

Elaborado pelo autor

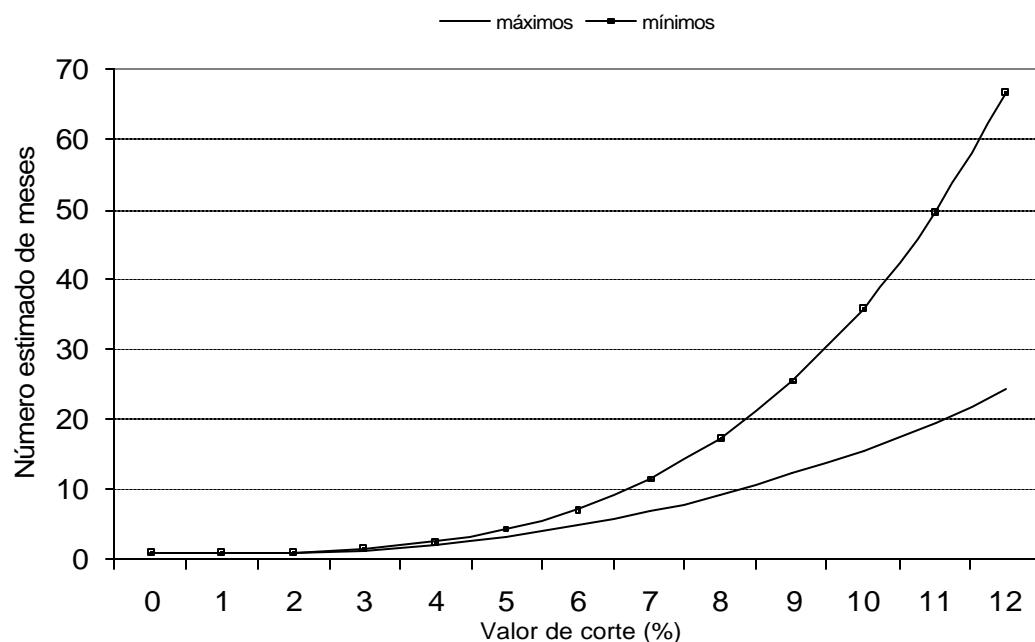


Figura 4.1 – Tempo estimado para que ocorra um retorno diário acima de um valor de corte para os máximos/mínimos absolutos valores mensais do índice BOVESPA

Pode-se notar que há uma diferença relevante entre a série de máximos e a de mínimos.

Observa-se na figura 4.1 , a comparação entre as curvas de tempo estimado por valor de corte para máximos e mínimos. Pode-se observar que até o valor de $u = 3\%$, as duas séries se comportam semelhantemente. Após $u = 3\%$, a série de mínimos começa a se distanciar da série de máximos, apresentando valores de tempo estimado proporcionalmente cada vez maiores.

4.3 Cálculo da Probabilidade de Ocorrência de Eventos Extremos

Outra informação relevante é ter o conhecimento das chances de o índice diminuir (ou aumentar) mais que um dado valor de corte u . Esta questão está relacionada a segunda pergunta que foi destacada anteriormente. Por exemplo, pode-se estar interessado na probabilidade de o índice BOVESPA exceder o valor de 8%, pelo menos uma vez, dentro dos próximos j meses. Para responder esta questão é necessário calcular a probabilidade r_j de que o retorno diário do índice viole o valor de corte u pelo menos uma vez antes do tempo j , que é dada por $r_j = \Pr\{L(u) \leq j\} = 1 - (G_x(u))^j$.

A tabela 4.2 e a figura 4.2 fornecem as estimativas das probabilidades r_j dos valores máximos e mínimos absolutos do índice BOVESPA ultrapassar para cima três valores de corte: 5%, 10%, 15%.

Tempo esperado (meses)	Probabilidade (r_j) estimada de que ocorra pelo menos um retorno diário acima de um valor de corte u (%)					
	Para $u=5\%$		Para $u=10\%$		Para $u=15\%$	
	máximos	mínimos	máximos	mínimos	máximos	Mínimos
0	0	0	0	0	0	0
1	31	23	6	3	2	1
2	52	41	12	5	5	1
3	67	55	18	8	7	2
4	77	65	23	11	9	3
5	84	73	28	13	11	3
6	89	80	33	16	14	4
7	92	84	37	18	16	5
8	95	88	41	20	18	5
9	96	91	45	22	20	6
10	97	93	48	25	22	7
11	98	95	52	27	23	7
12	99	96	55	29	25	8

Tabela 4.2 – Probabilidade de que ocorra pelo menos um retorno diário acima de um valor de corte para os máximos/mínimos absolutos mensais do índice BOVESPA

Elaborado pelo autor

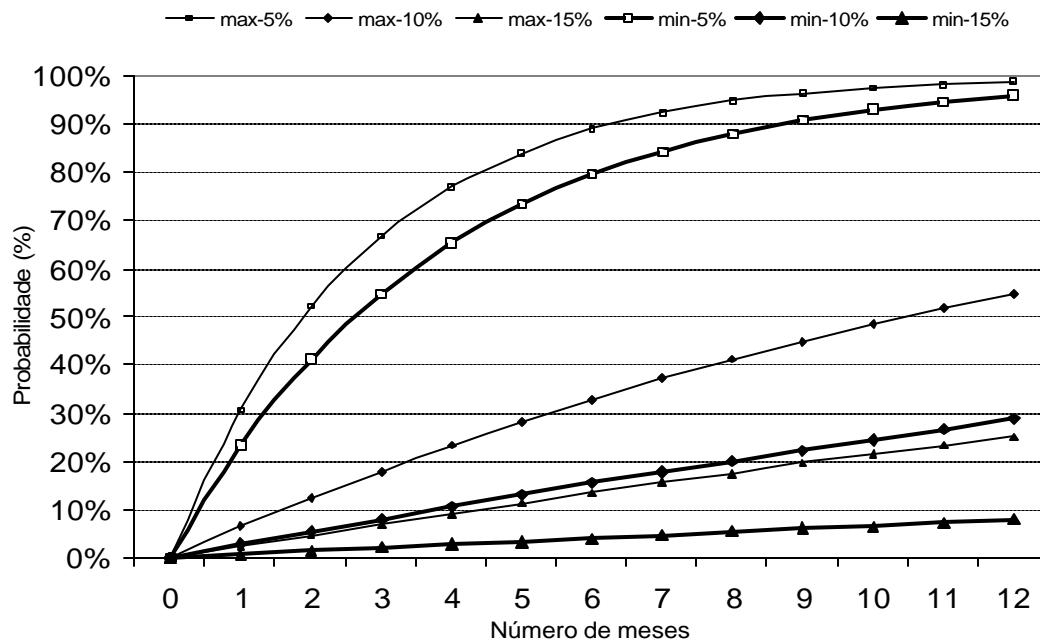


Figura 4.2 – Probabilidade de que ocorra pelo menos um retorno diário acima de um valor de corte para os máximos/mínimos absolutos mensais do índice BOVESPA

Percebe-se que com o passar do tempo a probabilidade de ocorrer um evento de magnitude u aumenta. Por exemplo, a probabilidade de ocorrer um evento na série de máximos de magnitude maior que $u = 5\%$ para $n = 6$ é de 89% enquanto que para $n = 12$ é de aproximadamente 100%.

Outro ponto lógico a observar é que as probabilidades de ocorrência de u , para um n fixado, sempre diminuem com o aumento de u . Por exemplo, para a série de mínimos, com $n = 6$, a probabilidade de ocorrer um evento de magnitude absoluto maior que 5% é de 80%, enquanto que para um evento maior que 10% é de 16%.

Nota-se novamente a disparidade entre as duas séries (máximos e mínimos). Para períodos iguais de tempo, a probabilidade de ocorrer um valor qualquer de u é sempre maior para os máximos. No entanto, para $u = 5\%$, observa-se na figura 4.2 que as curvas são muito semelhantes. A diferença das curvas se acentua na medida que se compara as mesmas para valores maiores de u . Para $u = 10\%$ e $u = 15\%$ a diferença das curvas é muito acentuada. O fato de semelhança para $u = 5\%$ e diferença brusca para $u = 10\%$ e $u = 15\%$ se deve a constituição das séries, ou seja, para as duas séries a quantidade de valores maiores ou iguais a 5% é quase igual. Já a quantidade de valores maiores que $u = 10\%$ e $u = 15\%$ é muito menor na série de mínimos. Por exemplo, a probabilidade que o índice BOVESPA apresente pelo menos um retorno diário acima do nível de 15% dentro dos próximos 12 meses é de praticamente 25%. E a probabilidade de que o índice BOVESPA apresente um retorno diário abaixo do nível de -15% pelo menos uma vez no próximo período de 12 meses é de aproximadamente 8%.

A tabela 4.3 e a figura 4.3 exibe a probabilidade r_j versus valores de corte positivos u para períodos fixos de tempo: 3, 6 e 12 meses.

Valor de corte u (%)	Probabilidade estimada de que ocorra pelo menos um retorno diário acima de um valor de corte correspondente dentro dos próximos n meses (%)					
	Para $n=3$		Para $n=6$		Para $n=12$	
	máximos	mínimos	máximos	mínimos	máximos	Mínimos
0	100	100	100	100	100	100
1	100	100	100	100	100	100
2	100	100	100	100	100	100
3	98	97	100	100	100	100
4	85	79	98	95	100	100
5	67	55	89	80	99	96
6	51	36	76	59	94	84
7	38	24	62	42	85	67
8	29	16	50	30	75	51
9	23	11	40	21	64	38
10	18	8	33	16	55	29
11	15	6	27	12	47	22
12	12	4	22	9	40	17

Tabela 4.3 – Probabilidade de que ocorra pelo menos um retorno diário dos máximos/mínimos absolutos mensais do índice BOVESPA acima de um valor de corte correspondente dentro dos próximos n meses.

Elaborado pelo autor

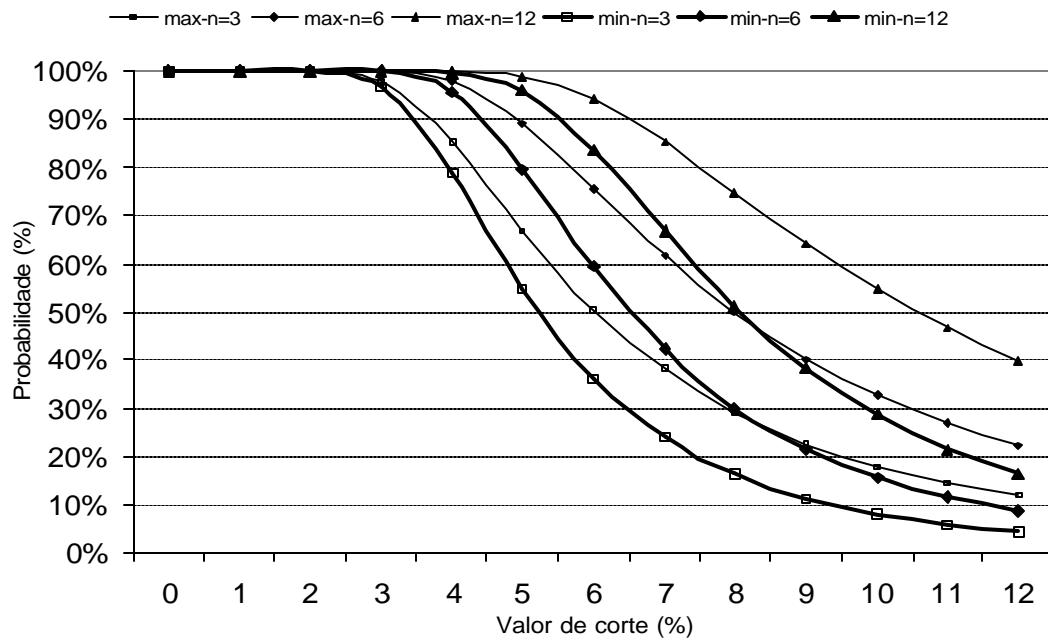


Figura 4.3 – Probabilidade de que ocorra pelo menos um retorno diário dos máximos/mínimos mensais do índice BOVESPA acima/abaixo de um valor de corte correspondente dentro dos próximos n meses.

Elaborado pelo autor

Através desta análise chegam-se nas mesmas conclusões acima mostradas, ou seja: dado um u fixo, a medida que se aumenta o tempo aumenta-se a probabilidade de ocorrência; para um n , a medida que se aumenta o valor de u diminui-se a probabilidade de ocorrência; e dado u e n fixos, a probabilidade de ocorrência é sempre maior para a série de máximos.

Pode-se observar na figura 4.3 que até $u = 3$ as probabilidades de ocorrência para máximos e mínimos são praticamente iguais para quaisquer valores de n . A partir deste ponto, as probabilidades começam a diminuir, para n fixos, mais acentuadamente para os mínimos.

4.4 Cálculo do Evento de t -meses

Além disto, pode-se calcular o evento t -meses. O evento t -meses, como já mencionado anteriormente, é um evento extremo que se espera observar pelo menos uma vez em t meses. Ou seja, é o nível de retorno diário que, em média, só deve ser

ultrapassado em um único mês a cada t meses. Vale ressaltar, que não é o mesmo que afirmar que este nível só será ultrapassado, por exemplo, uma única vez a cada 24 meses, visto que as séries de retornos tendem a formar grupos de volatilidade. Como

$$E[L(u_t)] = \frac{1}{1 - G_X(u_t)} , \text{ um evento de } t\text{-meses é tal que } u_t = G_X^{-1}\left(1 - \frac{1}{E[L(u_t)]}\right),$$

onde $G_X^{-1}(\cdot)$ representa a inversa da função de distribuição acumulada G_X . Por exemplo, fixe $t = 6$ meses. Um evento de 6-meses é o valor $u_6 = G_X^{-1}\left(1 - \frac{1}{6}\right) = G_X^{-1}(0.833)$.

A tabela 4.4 e a figura 4.4 fornecem os eventos de 3-, 6-, 9-, 12-, 18- e 24-meses para os máximos e mínimos absolutos mensais do índice BOVESPA, respectivamente. Por exemplo, espera-se que um retorno diário para o índice BOVESPA seja maior que 10,6% , em média, somente uma vez a cada 18 meses. Embrechts *et al.*(1997) refere-se a este valor de corte como “stress period”, ou seja, período de estresse.

t	G_X (%)	Evento t -meses (%)	
		máximos	Mínimos
3	66,67	4,8	4,3
6	83,33	6,6	5,6
9	88,89	7,9	6,5
12	91,67	9,0	7,1
18	94,44	10,6	8,1
24	95,83	12,0	8,9

Tabela 4.4 – Evento t-meses para os máximos mensais do índice BOVESPA

Elaborado pelo autor

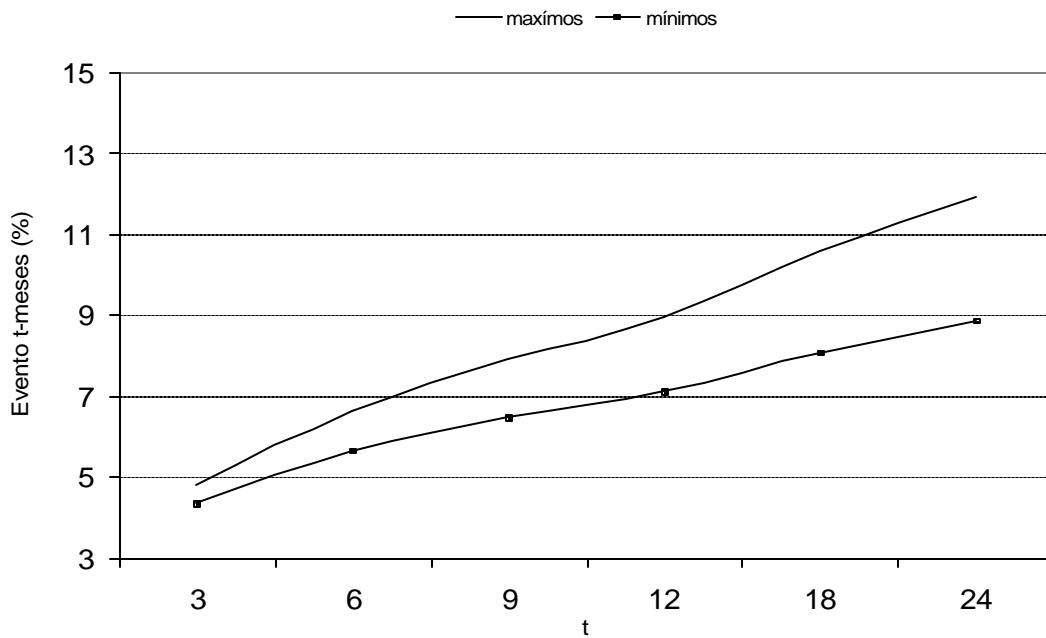


Figura 4.4 – Evento t -meses para os máximos/mínimos absolutos mensais do índice
BOVESPA

Elaborado pelo autor

Aqui novamente percebem-se as diferenças entre máximos e mínimos, sendo os eventos de t -meses sempre maiores para os máximos para um t fixado.

4.5 Observações Gerais

As diferenças acima elencadas se devem a diferenças de densidades das caudas esquerda e direita da distribuição de probabilidade de log-retornos do índice BOVESPA, sendo a cauda direita mais densa que a esquerda.

As ferramentas de análise apresentadas e analisadas acima foram construídas, como já mencionado, através das séries-base de mínimos e máximos. O próximo e último passo do trabalho é confrontar valores estimados com valores observados. Os valores observados foram construídos através das séries de teste de mínimos e máximos, já apresentadas. A comparação será realizada no próximo capítulo, concomitantemente com a conclusão do trabalho, sugestão de continuação do estudo e outros.

CAPÍTULO 5 –CONCLUSÃO

5.1 Introdução

Este é o capítulo de fechamento do trabalho. A segunda seção do mesmo foi dedicada a comparação dos valores estimados por algumas ferramentas de análise de risco construídas no capítulo 4 com os valores observados. Os valores observados foram valores conseguidos através da manipulação da série de dados teste de mínimos e máximos. A manipulação dos dados teste para a extração dos valores observados pode ser realizada de formas diferentes. As formas escolhidas de manipulação serão explicitadas concomitantemente com a apresentação dos valores observados.

Na seção 5.3 será apresentada a conclusão do trabalho.

Por fim, comentários, recomendações, propostas de melhoria e continuação do trabalho serão apresentadas na seção 5.4.

5.2 Estimado x Observado

5.2.1 Cálculo da Probabilidade de Ocorrência de Eventos Extremos

Nesta subseção compara-se o cálculo estimado da probabilidade de ocorrência de eventos extremos com os valores observados.

O cálculo da probabilidade observado utiliza as séries de teste de mínimos e máximos, e é alcançado através da expressão abaixo:

$$p_{observado} = \frac{\sum_i X_i}{N_t} \quad (63)$$

onde $X_i - u > 0$, N_t é o número total de “janelas de tempo” de tamanho t completas, t é o número de meses.

Tempo esperado (meses)	Probabilidade (r_j) estimada de que ocorra pelo menos um retorno diário acima de um valor de corte u (%)											
	Para $u=5\%$				Para $u=10\%$				Para $u=15\%$			
	Máximos		mínimos		máximos		mínimos		máximos		Mínimos	
	est	Obs	est	obs	est	obs	est	obs	est	obs	est	Obs
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	31	33	23	20	6	7	3	4	2	3	1	2
2	52	47	41	33	12	12	5	6	5	7	1	4
3	67	55	55	44	18	18	8	8	7	11	2	6
4	77	60	65	55	23	22	11	11	9	15	3	9
5	84	65	73	67	28	26	13	13	11	19	3	11
6	89	70	80	80	33	30	16	16	14	23	4	13
7	92	75	84	89	37	33	18	18	16	27	5	16
8	95	78	88	95	41	35	20	21	18	29	5	19
9	96	82	91	98	45	38	22	24	20	32	6	21
10	97	86	93	100	48	41	25	27	22	35	7	24
11	98	90	95	100	52	44	27	30	23	38	7	28
12	99	94	96	100	55	47	29	33	25	40	8	31

Tabela 5.1 – Probabilidade estimada x observada de que ocorra pelo menos um retorno diário acima de um valor de corte para os máximos/mínimos absolutos mensais do índice BOVESPA

Elaborado pelo autor

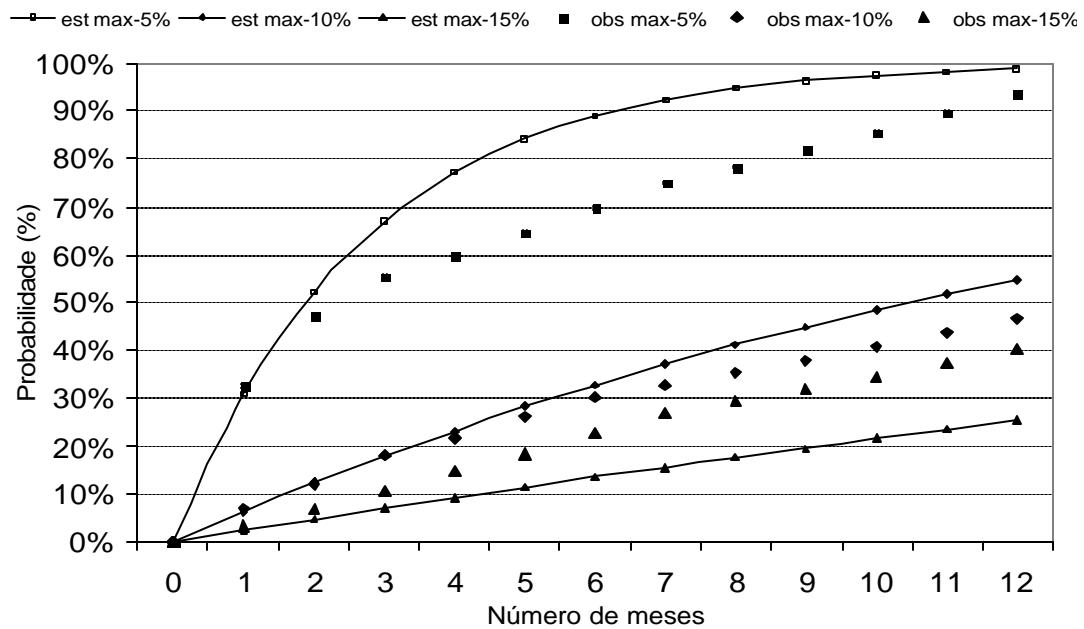


Figura 5.1 – Probabilidade estimada x observada de que ocorra pelo menos um retorno diário acima de um valor de corte para os máximos mensais do índice BOVESPA

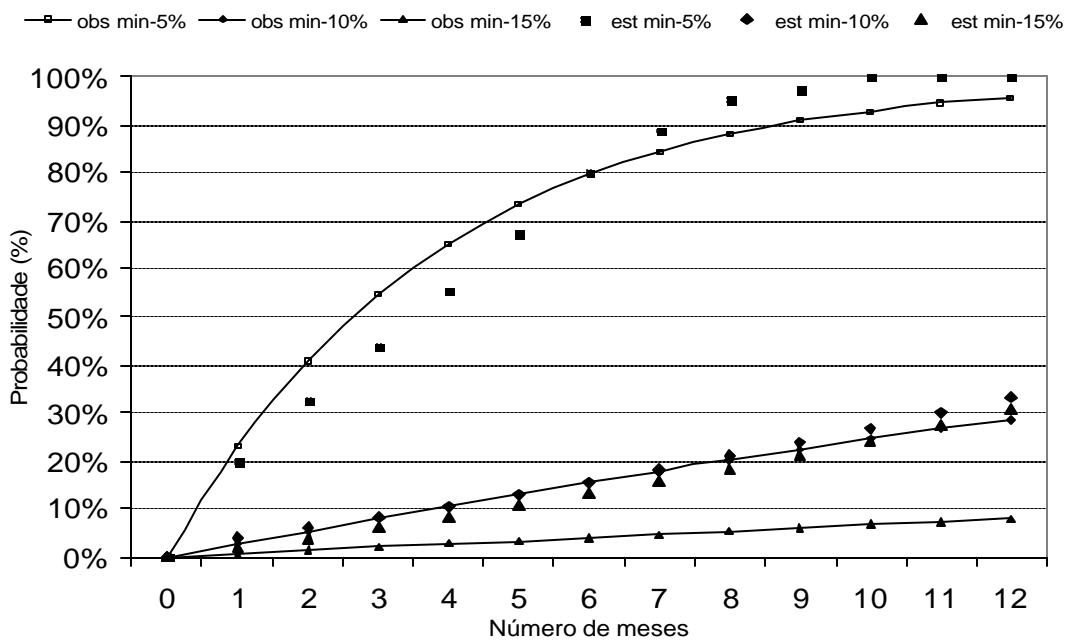


Figura 5.2 – Probabilidade estimada x observada de que ocorra pelo menos um retorno diário acima de um valor de corte para os mínimos absolutos mensais do índice BOVESPA

Pode-se perceber que para u fixado em 5% e 10%, tanto para os máximos quanto para os mínimos, as curvas de probabilidades observadas se aproximam das curvas de probabilidades estimadas (vide figuras 5.1 e 5.2), o que reafirma a validade da estimação realizada.

Entretanto, para u fixado em 15%, há um deslocamento considerável das curvas de probabilidades observadas em relação às curvas de probabilidades estimadas, principalmente para a série de mínimos. Este deslocamento se acentua com o aumento do número de meses, o que pode ser conferido nas figuras 5.1 e 5.2. Por exemplo, para a série de mínimos, a probabilidade de ocorrer um evento com valor absoluto acima de 15% em um período de 6 meses é de 4%, enquanto que a observada é de 13%. Já para um período de 12 meses a probabilidade observada cresce consideravelmente para 31%, enquanto que a estimada aumenta apenas para 8%. Logo, a estimação não condiz com o observado, no entanto, isto pode ser explicado pela quantidade pequena de números da amostra teste.

A probabilidade estimada de ocorrer, para um período n fixo, um evento variável u , calculada na tabela 4.3 e exposta graficamente na figura 4.3 não será confrontada com valores observados pois se trataria da mesma informação, apenas analisada de uma forma diferente, já mostrada na tabela 5.1 e nas figuras 5.1 e 5.2.

5.2.3 Evento de t -meses

Nesta parte do trabalho faz-se a comparação entre o cálculo do evento de t -meses estimado e observado.

Para o cálculo do período observado utilizam-se as séries de teste de mínimos e máximos construídas de forma já explicada.

Para se calcular o evento de t -meses observado utiliza-se a fórmula abaixo:

$$u_{obst} = \text{Min}(\text{Max}(X_{i,1}), \text{Max}(X_{i,2}), \dots, \text{Max}(X_{i,S})) \quad (64)$$

onde t é o tamanho do espaço temporal (meses), $i = (1, 2, \dots, t)$, $S = \text{int}\left(\frac{N}{t}\right)$ é o número de sub-espacos temporais de tamanho t e N é o tamanho da série.

t	Evento t -meses (%)			
	máximos		Mínimos	
	estimado	observado	estimado	Observado
3	4,8	3,8	4,3	3,1
6	6,6	4,2	5,6	3,5
9	7,9	4,6	6,5	5,2
12	9,0	5,0	7,1	6,8
18	10,6	6,6	8,1	6,8
24	12,0	17,1	8,9	8,9

Tabela 5.2 – Evento t -meses estimado x observado para os máximos mensais do índice BOVESPA

Elaborado pelo autor

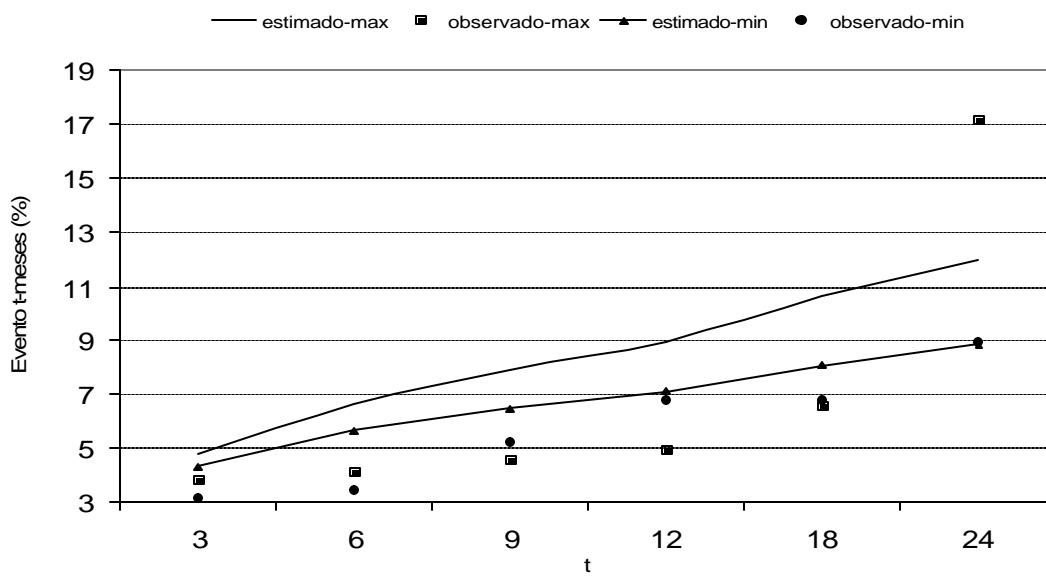


Figura 5.3 – Evento t -meses estimado x observado para os máximos/mínimos absolutos mensais do índice BOVESPA

Elaborado pelo autor

Ao se analisar a tabela 5.2 e a figura 5.3 percebe-se que, exceto em uma observação, o evento de t -meses estimado é sempre maior que o evento de t -meses observado, caracterizando-se, aqui neste caso, como uma ferramenta de risco relativamente conservadora, ou seja, sempre calcula valores absolutos de ganhos e de perdas maiores que o observado. O valor exceção de 17,1% pode ser desconsiderado

pois o cálculo do evento de 24-meses envolve apenas dois sub-espacos temporais de tamanho $t = 24$, dado o pequeno tamanho da série de teste (58 dados), o que propicia distorções como esta. A medida que o tamanho da série de teste aumenta, e consequentemente aumenta o número de sub-espacos temporais, tais distorções vão desaparecendo.

Outra forma de comparar os valores estimados com os valores observados é utilizando a tabela e as figuras abaixo.

t	máximos			Mínimos		
	evento- t	estimado	observado	evento- t	estimado	observado
3	4,8	19,2	22	4,3	16,7	15
6	6,6	9,7	10	5,6	8,3	8
9	7,9	6,5	8	6,5	5,6	8
12	9,0	4,8	6	7,1	4,2	5
18	10,6	3,2	4	8,1	2,8	5
24	12,0	2,4	3	8,9	2,1	3

Tabela 5.3 – Quantidade de ultrapassagens dos valores dos eventos de t -meses estimadas x observadas para os máximos e mínimos mensais do índice BOVESPA

Elaborado pelo autor

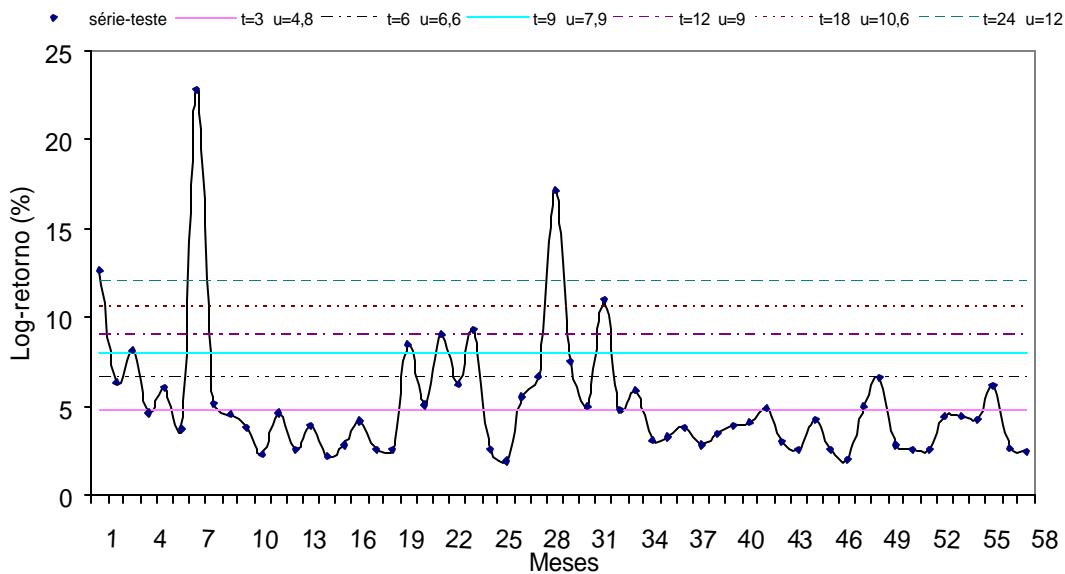


Figura 5.4 – Quantidade de ultrapassagens dos valores dos eventos de t-meses estimadas x observadas para os máximos mensais do índice BOVESPA

Elaborado pelo autor

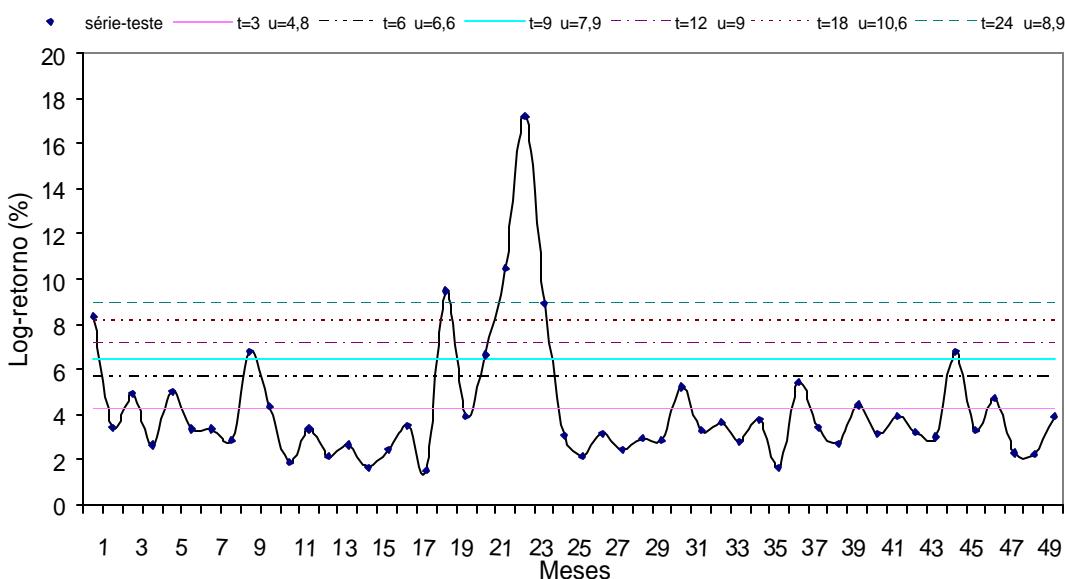


Figura 5.5 – Quantidade de ultrapassagens dos valores dos eventos de t-meses estimadas x observadas para os máximos mensais do índice BOVESPA

Elaborado pelo autor

O evento de t -meses, como já mencionado anteriormente, é o nível que será ultrapassado apenas uma vez em média no período corrente de t meses. Por exemplo, o valor estimado do evento de 24-meses para os máximos do índice BOVESPA é 12% (vide tabela 4.4), logo, em média, deve ser ultrapassado apenas uma vez a cada 24 meses. Como a amostra teste contém 58 meses, o valor 12% pode ser ultrapassado

$$\frac{58}{24} = 2,4 \text{ vezes. Na figura 5.4 observa-se que o valor de 12\% é ultrapassado 3 vezes.}$$

Já o valor de 10,6% , que é o evento de 18-meses estimado, para um período de 58 meses, pode ser ultrapassado $\frac{58}{18} = 3,2$ vezes. Na figura 5.4 observa-se que o valor

10,6% é ultrapassado 4 vezes. Já para os mínimos, o evento 24-meses estimado é 8,9% e deve ser ultrapassado apenas $\frac{58}{18} = 2,1$ vezes, entretanto, observa-se na figura

5.5 que ele é ultrapassado 3 vezes. A tabela 5.3 mostra a comparação completa entre os números estimados de eventos t -meses para cada t e o número de vezes que o evento de tal magnitude foi observado nas amostras testes, tanto para os máximos quanto para os mínimos do índice BOVESPA. Pode-se observar que os valores estimados para os máximos aderem melhor aos valores observados do que os valores dos mínimos.

5.3 Conclusão

O objetivo do trabalho foi desenvolver uma análise de risco do mercado de derivativos acionário brasileiro. Esta análise de risco foi baseada nos valores extremos que os ganhos ou as perdas do índice futuro BOVESPA pode assumir.

Inicialmente, de posse da série de dados completa do estudo, foi realizada uma análise descritiva dos mesmos. Esta análise foi muito útil para provar que a distribuição dos dados em estudo tem uma forma característica, apresentando caudas mais densas comparadas, por exemplo, com as caudas de uma distribuição normal.

Ao se subdividir a série completa dos dados em duas séries, a de máximos e a de mínimos foi possível constatar também que as duas se distribuem numa formação com caudas densas.

O próximo passo foi modelar as distribuições que os máximos e mínimos apresentam e para isto aplicou-se a Teoria dos Valores Extremos. De acordo com esta, as distribuições podem ser apenas de três tipos: Gumbel, Fréchet ou Weibull, que são representadas por uma única distribuição, a distribuição GEV.

A estimação dos parâmetros da distribuição GEV foi realizada através do método de máxima verossimilhança, que se mostrou muito prático, apesar do seu grau mediano de dificuldade de aplicação. As estimativas dos parâmetros encontradas foram testadas e a chegou-se a conclusão que tanto os mínimos quanto os máximos seguem uma distribuição Fréchet. Entretanto, a densidade da cauda esquerda da distribuição dos valores absolutos dos máximos apresentou-se mais acentuada em comparação com a distribuição dos mínimos. Este fato foi comprovado não apenas graficamente, mas também pelo confronto dos valores das estimativas dos parâmetros de escala encontrados, já que o parâmetro dos máximos é aproximadamente 53% maior que o dos mínimos.

Com as estimativas dos parâmetros das distribuições foi possível construir ferramentas de análise de risco, já que estas utilizam como base a distribuição de densidade de probabilidade estimada, ou seja, a que modela as séries em estudo.

As ferramentas construídas foram: Período do Retorno u , Probabilidade de Ocorrência de Eventos Extremos e Evento de t -meses. As informações obtidas através destas três ferramentas para os máximos foram confrontadas com as informações obtidas para os mínimos.

Para o Período de Retorno u , estimou-se que o tempo para ocorrer um evento de valor absoluto $u \leq 3$ é igual para a série dos máximos e dos mínimos. Entretanto, a medida que se aumenta u , a diferença de tempos estimados de ocorrência de um evento de magnitude u nas duas séries vai aumentando, pois o tempo dos mínimos cresce mais rapidamente que o tempo dos máximos. O gráfico u (evento de magnitude u) x t (número de meses estimado) apresenta a superposição inicial das duas curvas até $u \leq 3$ e o descolamento das mesmas após $u > 3$. Isto é observado pois números com magnitudes até o valor absoluto 3 são comuns tanto na série de máximos quanto na série de mínimos. Já números cada vez maiores que 3 são gradativamente mais difíceis de serem encontrados nas duas séries, entretanto na série de mínimos a dificuldade é sempre maior.

A Probabilidade de Ocorrência de Eventos Extremos foi construída de duas formas. Para a primeira utilizaram-se valores fixos de u e tempo variável, já para a segunda utilizaram-se valores fixos de tempo e valor de u variável. No primeiro caso, para cada valor fixado de u , a curva de *tempo x probabilidade* dos máximos é sempre acima da curva dos mínimos, indicando sempre probabilidade maior de ocorrência do evento analisado. No segundo caso, para cada valor fixo de tempo, a curva de $u x probabilidade$ dos máximos é também sempre acima da curva dos mínimos, indicando novamente probabilidades maiores para os máximos.

Para o Evento de t -meses a constatação não poderia ser diferente, o evento que em média só é ultrapassado uma vez a cada t meses é sempre apresenta valor superior para a série dos máximos.

A consistência dos números estimados através das ferramentas foi testada na última parte do trabalho. Esta última parte confrontou os valores estimados por algumas ferramentas (Probabilidade de Ocorrência de Eventos Extremos e Evento de t -meses) com os valores observados de uma amostra teste.

Os valores observados das probabilidades de ocorrência de eventos extremos se mostraram muito próximos dos valores estimados pela ferramenta. Entretanto, diferenças significativas foram especificamente encontradas para o caso em que se fixou $u = 15\%$, já que se pode observar as curvas de probabilidade observadas acima das curvas estimadas tanto para os máximos quanto para os mínimos. Certamente, esta diferença ocorre pois a amostra teste possui muito poucos dados maiores que 15% o que acaba distorcendo a análise.

O evento de t -meses estimado foi confrontado com duas informações observadas. A primeira pode ser considerada o evento de t -meses observado. Neste caso, o estimado se mostrou relativamente uma ferramenta conservadora apresentando valores maiores do que o observado tanto para os máximos quanto para os mínimos. No segundo caso, comparou-se uma informação derivada do valor do evento de t -meses, seja ele estimado ou observado, e do tempo de observação. A comparação mostrou coerência entre valores estimados e observados tanto para os máximos quanto para os mínimos, entretanto com maior coerência para os máximos.

As ferramentas, em geral, se mostraram eficientes. Obviamente, nenhuma ação em relação a risco deve ser tomada única e exclusivamente com base nas

informações produzidas pelas ferramentas. Entretanto, o banco no qual foi desenvolvido o trabalho começou a analisar as informações geradas, as quais servem como subsídios complementares para uma tomada de decisão até mesmo no que tange, não só temas relacionados a risco, mas também a decisões de investimento.

5.4 Comentários Finais e Recomendações

O trabalho foi de muito valia pois conciliou necessidades do estágio na empresa citada, desenvolver uma análise de risco do IBOVESPA com base na TVE e que posteriormente poderia ser utilizada para outros ativos, com a oportunidade de consolidação e aprendizagem de ferramentas estatísticas e matemáticas essenciais.

Alguns acontecimentos merecem ser destacados.

O primeiro foi o problema encontrado com a série de dados. A série base utilizada tem 2375 dados. Como o estudo envolve valores extremos, da série base os mesmos necessitam ser extraídos, restando apenas 113 dados para a série de máximos e 114 dados para a série de mínimos. As quantidades de dados para a série de máximos e de mínimos poderiam ser ainda menores se o método de seleção fosse outro além do escolhido, no caso “block máxima” mensal. Entretanto, escolhendo o método de seleção mensal percebe-se, na série de extremos, valores de magnitude não tão elevada, ou seja, valores que não fazem teoricamente parte das caudas da distribuição de probabilidade da série base. Este foi um dilema que teve de ser resolvido: ou se diminuía o número de dados das séries de máximos e mínimos através da seleção, por exemplo, anual e trabalhava-se com números “mais” extremos, pertencentes as caudas; ou aumentava-se o número de dados das séries e trabalhava-se também com dados mais interiores da distribuição de probabilidade da série base. O autor escolheu trabalhar com um número maior de dados. Uma recomendação de continuação do trabalho é a construção de modelos através de séries de máximos e mínimos selecionados por período distintos (bimestral, semestral, anual), e posteriormente a comparação dos mesmos.

Outro problema foi encontrado na validação do modelo. A validação do modelo ocorreu através do confronto de dados observados com os dados estimados pelo modelo. Teve-se o cuidado de escolher uma amostra de teste que contivesse

dados aleatoriamente escolhidos de todo o período da série base. Neste caso, os dados das séries de teste e das séries de máximos e de mínimos continham valores representantes de todos os períodos, ou seja, de períodos de baixa e de alta volatilidade. O modelo foi validado para o próprio período de estimação, ou seja, não foi utilizado como ferramenta de previsão e posteriormente validado. Para que uma validação de previsão ocorresse dever-se-ia utilizar, por exemplo, a primeira metade dos dados temporalmente ordenados das séries completas de máximos e de mínimos para se construir o modelo, e a segunda metade para se testar o modelo. Logo, esta é uma segunda recomendação de continuação do trabalho, ou seja, validar seu poder de previsão.

Outro ponto interessante e que vale ser destacado é a questão da manipulação dos dados observados para que se tornem comparáveis com as informações estimadas. O autor entende que a manipulação pode ser realizada de várias formas quanto que exista certa lógica que possibilite comparação. Sendo assim, algumas comparações foram realizadas, sendo a comparação do Período de Retorno u não efetuada, dada a relativa complexidade na manipulação dos dados observados. Portanto, a comparação do Período de Retorno u estimado com o observado fica como a terceira recomendação de extensão do assunto estudado.

O último ponto a ser mencionado é em relação a adoção das ferramentas aqui desenvolvidas como auxiliares na gestão de risco. As ferramentas aqui desenvolvidas podem ser muito bem utilizadas como auxiliares no gerenciamento de risco não só de índices de ações e ações mas também de opções e contratos de taxas de juros (renda fixa), sendo necessário apenas a construção das séries de retornos dos mesmos. A implementação de um sistema que gere tais informações é simples e demanda nada mais que algumas linhas de programação e um programa como o Matlab (mais precisamente o seu módulo EVIM, o módulo de valores extremos do Matlab).

Referências Bibliográficas

BIERMAN, JR., H. **The Great Miths of 1929 and the Lessons to be Learned**. New York: Greenood Press,1991.

BILLINGSLEY, P. **Probability and Measure**. New York: John Wiley, 1986.

CHANDRA, M., SINGPURWALLA, N.D., and STEPHENS, M.A. **Kolmogorov Statistics for Tests of Fit for The Extreme Value and Weibull Distribution**. Journal of the American Statistical Association, 76, 729-731, 1981.

COSTA NETO, P.L.O. **Estatística**. São Paulo: Edgard Blücher, 1977

DUARTE, JR., A.M. **Model Risk and Risk Management**. Derivatives Quartely, 3, 2, 1997.

EMBRECHTS, P., KLUPPELBERG, C., and MIKOSCH, T. **Modelling Extremal Events**. Berlin: Springer-Verlag, 1999.

FISCHER, R.A., and TIPPET, L.H.C. **Limiting Forms of the Frequency Distribution of the Largest or Smallest Member of a Sample**. Proceedings of the Cammbridge Philisophical Society, 24, 180-190, 1928.

FREUND, J.E. e SIMON G.A. **Estatística Aplicada: Economia, Administração e Contabilidade**. Porto Alegre: Bookman, 2000.

FLOOD, R.P., and GARBER, P.M. **Speculative Bubbles, Speculative Attacks and Policy Switching**. Cambridge:The MIT Press, 1994.

GILLI, E., KËLLEZI, E. **Extreme Values for Tail-Related Risk Measures**. In: Computational Finance 2000 Conference, London, 2000. Brussels: Kluwer Academic Publishres, 2000. p.1-p.21.

GENÇAY, R., SELÇUK, F. and ULUGÜLYAGCI, A. **EVIM: A Software Package for Extreme Value Analysis in MATLAB**. Bilkent University: Ankara, 2002.

GNEDENKO, B.V. **Sur la Distribution Limited u Terme Maximum d'une Série Aléatoire**. Annals of Mathematicas, 44, 423-453, 1943

GUJARATI, D.N. **Econometria Básica**. São Paulo: Makron Books, 2000.

GUMBEL, E.J. **Statistics of Extremes**. New York: Columbia University Press, 1958.

HANSELMAN, D. **Matlab 5 –Guia do Usuário**. São Paulo: Makron Books, 1999.

HUMES, A.F.P.C., MELO, YOSHIDA e MARTINS. **Noções de Cálculo Numérico**. São Paulo:McGraw-Hill do Brasil, 1984.

JARQUE, C.M., and Bera, A.K. **A Test for Normality of Observations and Regression Residuals**. International Statistical Review, 55, 163-172 1987.

JEKINSON, A.F. **The Frequency Distribution of the Annual Maximum (or Minimum) Values of Metereological Elements**. Quartely Journal of the Royal Metereology Society, 87,158-171, 1955.

JONHSONS, N. L., KOTZ, S., BALAKRISHNAN, N. **Continuos Univariate Distributions**.New York: John Wiley, 1994. v.1.

JONHSONS, N. L., KOTZ, S., BALAKRISHNAN, N. **Continuos Univariate Distributions**.New York: John Wiley, 1994. v.2.

JORGENSEN, B. **Maximum Likelihood Estimation and Large-Sample Inference for Generalized Linear and Nonlinear Regression Models**. Biometrika, 70, 19-28,1983.

MATSUMOTO, E.Y. **Matlab6 Fundamentos de Programação**. São Paulo: Érica, 2000.

ROOTZÉN, H. and Klüppelberg, C. **A Single Number Can't Hedge against Economic Catastrophes**. Ambio,6, 550-555, 1999.

APÊNDICE

APÊNDICE A – SÉRIES HISTÓRICAS

Séries dos Máximos e Mínimos Valores Mensais da Série de Log- Retornos Diários dos Preços do futuro de IBOVESPA

Posição Temporal	Máximos	Mínimos
1	11,02	-2,94
2	12,64	-9,69
3	6,30	-11,19
4	10,10	-8,34
5	11,46	-3,44
6	8,10	-5,51
7	4,47	-4,31
8	4,71	-11,09
9	5,50	-3,69
10	4,58	-4,89
11	6,03	-4,98
12	3,71	-10,38
13	9,31	-6,83
14	22,81	-10,15
15	7,70	-5,25
16	5,17	-2,64
17	4,99	-4,99
18	3,62	-3,28
19	4,50	-3,38
20	3,77	-3,31
21	2,24	-2,87
22	5,29	-6,75
23	4,58	-4,36
24	6,43	-1,85
25	3,95	-1,93
26	2,50	-4,76
27	2,63	-2,52
28	2,51	-2,69
29	3,88	-1,94
30	3,54	-3,35
31	3,88	-2,12
32	2,72	-2,86
33	1,70	-1,83
34	2,30	-1,62
35	2,18	-2,63
36	2,79	-1,67
37	4,17	-2,45
38	2,57	-2,63
39	4,24	-2,23
40	2,50	-3,49
41	3,64	-1,50
42	8,45	-8,90
43	5,03	-6,01
44	9,02	-3,86
45	6,22	-16,22
46	9,26	-10,76
47	4,32	-3,92
48	3,39	-5,75
49	2,57	-1,30
50	1,91	-1,26
51	2,85	-5,89
52	5,52	-6,65
53	6,77	-5,48
54	3,69	-5,46
55	6,65	-10,48
56	17,12	-17,23
57	7,50	-4,46
58	4,98	-9,20
59	6,01	-8,88
60	28,82	-10,50
61	8,40	-3,17
62	4,76	-3,05
63	2,86	-2,14
64	5,89	-5,08
65	2,15	-3,11
66	3,03	-2,90
67	3,25	-2,40
68	3,79	-2,90
69	4,85	-2,44
70	2,83	-2,23
71	4,28	-6,59
72	3,43	-2,84
73	4,56	-3,82
74	3,92	-5,17
75	4,04	-3,24
76	4,88	-2,21
77	2,96	-3,64

78	3,27	-2,77
79	1,90	-4,00
80	3,01	-3,07
81	4,00	-3,78
82	4,85	-4,77
83	7,34	-1,60
84	2,53	-4,09
85	3,25	-5,43
86	4,22	-5,22
87	3,37	-3,39
88	2,09	-4,29
89	2,55	-2,70
90	1,94	-3,50
91	4,96	-9,63
92	4,93	-2,48
93	6,60	-4,39
94	3,69	-3,10
95	2,80	-3,93
96	3,02	-3,23
97	3,48	-3,00
98	2,50	-4,27
99	2,48	-4,17
100	3,42	-5,22
101	4,41	-6,75
102	4,42	-3,25
103	4,26	-5,40
104	6,15	-4,67
105	2,60	-2,27
106	3,55	-2,20
107	3,24	-3,45
108	2,96	-3,95
109	2,79	-2,99
110	2,88	-2,24
111	3,02	-3,69
112	2,43	-2,85
113	3,36	-3,31

Séries Teste dos Máximos e Mínimos Valores Mensais de Teste

Índice	Máximos	Mínimos
1	12,64	-8,34
2	6,30	-3,44
3	8,10	-4,89
4	4,58	-2,64
5	6,03	-4,99
6	3,71	-3,38
7	22,81	-3,31
8	5,17	-2,87
9	4,50	-6,75
10	3,77	-4,36
11	2,24	-1,85
12	4,58	-3,35
13	2,51	-2,12
14	3,88	-2,63
15	2,18	-1,67
16	2,79	-2,45
17	4,17	-3,49
18	2,57	-1,50
19	2,50	-9,50
20	8,45	-3,92
21	5,03	-6,65
22	9,02	-10,48
23	6,22	-17,23
24	9,26	-8,88
25	2,57	-3,05
26	1,91	-2,14
27	5,52	-3,11
28	6,65	-2,40
29	17,12	-2,90
30	7,50	-2,84
31	4,98	-5,17
32	11,05	-3,24
33	4,76	-3,64
34	5,89	-2,77
35	3,03	-3,78
36	3,25	-1,60
37	3,79	-5,43
38	2,83	-3,39
39	3,43	-2,70
40	3,92	-4,39
41	4,04	-3,10

42	4,88	-3,93
43	3,01	-3,23
44	2,53	-3,00
45	4,22	-6,75
46	2,55	-3,25
47	1,94	-4,67
48	4,96	-2,27
49	6,60	-2,20
50	2,80	-3,95
51	2,50	
52	2,48	
53	4,41	
54	4,42	
55	4,26	
56	6,15	
57	2,60	
58	2,43	